

BIBLIOTHECA UNIV. IAGELL. CRACOVIENSIS
416521
6(1927)
II


V
B J
C

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME VI

ANNÉE 1927

KRAKÓW 1928

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

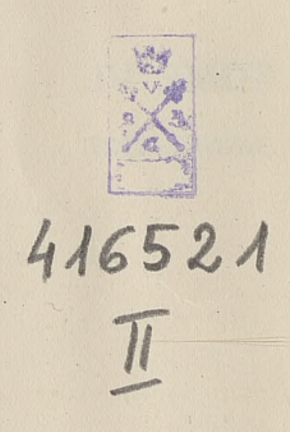
ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME VI

ANNÉE 1927



KRAKÓW 1928



Printed in Poland

*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*

Reprodukcja fotooffsetowa, 1962
Zakład Graficzny PWN, Łódź, Gdańska 162

Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.

Par

E. Cartan.

M. Janet a démontré récemment[1]) le théorème, énoncé pour la première fois par Schlaefli[2]), d'après lequel tout espace de Riemann à n dimensions peut être plongé dans un espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions. Je suis depuis plusieurs années en possession d'une autre démonstration, basée sur ma théorie des systèmes de Pfaff en involution, et qui met en évidence le degré de généralité de la solution générale du problème.

1. Soit un espace de Riemann à n dimensions rapporté à un système quelconque de repères rectangulaires. Les équations de structure de l'espace sont de la forme[3])

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_i' = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] \\ \omega_{ij}' = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] - \sum_{(k,h)} R_{ijkh} [\omega_k \omega_h], \end{cases}$$

où les coefficients $R_{ij.kh}$, composantes du tenseur de Riemann-Christoffel, satisfont aux relations classiques

$$(2)\qquad \begin{cases} R_{ij,kh} = -R_{ji,kh} = -R_{ij,hk} = R_{kh,ij}, \\ R_{ij.kh} + R_{ik,hj} + R_{ih,jk} = 0. \end{cases}$$

---

[1]) *Annales Soc. Pol. Math.*, 5, 1926, p. 38—73.

[2]) L. Schlaefli, Nota alla memoria del Sig. Beltrami (*Ann. di mat.*, 2e série, t. 5, 1871—1873, p. 170—193).

[3]) Voir E. Cartan, La Géométrie des espaces de Riemann (Mémorial Sc. Math., fasc. IX, 1925).

Prenons maintenant dans un espace euclidien à $N=\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions un système de repères rectangulaires complètement indéterminé, dépendant par suite de $\frac{N(N+1)}{2}$ paramètres arbitraires. Soient

$$\tilde{\omega}_i, \quad \tilde{\omega}_{ij}=-\tilde{\omega}_{ji} \quad (i, j=1, 2, \ldots, N)$$

les composantes du déplacement élémentaire du repère. On a les relations de structure de l'espace euclidien

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}'_i &= \sum_k [\tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_{ki}] \\ \tilde{\omega}'_{ij} &= \sum_k [\tilde{\omega}_{ik} \tilde{\omega}_{kj}] \end{aligned} \right. \qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, N).$$

Le théorème de Schlaefli revient à affirmer la possibilité de déterminer le repère rectangulaire de l'espace euclidien à N dimensions en fonction des n coordonnées d'un point de l'espace de Riemann de telle sorte qu'on ait les relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\tilde{\omega}_1=\omega_1, \ldots, \tilde{\omega}_n=\omega_n, \\ &\tilde{\omega}_{n+1}=0, \ldots, \tilde{\omega}_N=0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (4) signifient en effet que la variété décrite par l'origine du repère aura le même ds^2 que l'espace de Riemann.

Le dérivation extérieure des équations (4) donne, en tenant compte de ces équations elles-mêmes, de (1) et de (3),

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k(\tilde{\omega}_{ki}-\omega_{ki})]=0 \quad (i=1, \ldots, n),$$

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \tilde{\omega}_{k\alpha}]=0 \quad (\alpha=n+1, \ldots. N).$$

Les équations (5) entraînent les relations nouvelles

$$(7) \qquad \tilde{\omega}_{ij}=\omega_{ij} \qquad (i. j=1, 2, \ldots, n)$$

qui, dérivées extérieurement, donnent

$$(8) \qquad \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=N} [\tilde{\omega}_{i\lambda} \tilde{\omega}_{j\lambda}]=\sum_{(kh)}^{1, \ldots n} R_{ij, kh}[\omega_k \omega_h].$$

Nous sommes finalement ramenés à l'intégration du système de Pfaff

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_i = \omega_i & (i=1,\ldots,n), \\ \tilde{\omega}_\alpha = 0 & (\alpha = n+1,\ldots,N), \\ \tilde{\omega}_{ij} = \omega_{ij} & (i,j=1,\ldots,n), \end{cases}
$$

qui donne, par dérivation extérieure, les équations

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \tilde{\omega}_{k\alpha}] = 0 & (\alpha = n+1,\ldots,N), \\ \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=N} [\tilde{\omega}_{i\lambda} \tilde{\omega}_{j\lambda}] = \sum_{(k,h)}^{1,\ldots,n} R_{ij,kh} [\omega_k \omega_h] & (i,j=1,\ldots,n). \end{cases}
$$

2. C'est au système (I) que nous allons appliquer la théorie des systèmes de Pfaff en involution [1]). Nous avons $\frac{N(N+1)}{2}$ fonctions inconnues de n variables indépendantes. Considérons, dans l'espace de ces $\frac{N(N+1)}{2}+n$ variables tant dépendantes qu'indépendantes, un point arbitraire. Tout élément linéaire issu de ce point est défini par ses paramètres directeurs, qu'on peut prendre égaux aux quantités $\omega_i, \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_\alpha, \tilde{\omega}_{ij}, \tilde{\omega}_{i\alpha}$, où les différentielles se rapportent au passage du point donné au point infiniment voisin dans la direction de l'élément linéaire donné. Un élément linéaire est intégral si ses paramètres directeurs satisfont aux relations (I). Deux éléments linéaires intégraux sont en involution si leurs paramètres directeurs non nuls, à savoir:

$$
\begin{aligned} &\omega_i, \ \tilde{\omega}_{i\alpha} \quad \text{pour le premier,} \\ &\overline{\omega}_i \ \overline{\tilde{\omega}}_{i\alpha} \quad \text{pour le second,} \end{aligned}
$$

satisfont aux relations déduites de (II):

$$
(9) \qquad \begin{cases} \sum_{k}^{1,\ldots,n} (\omega_k \overline{\tilde{\omega}}_{k\alpha} - \tilde{\omega}_{k\alpha} \overline{\omega}_k) = 0, \\ \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=N} (\tilde{\omega}_{i\lambda} \overline{\tilde{\omega}}_{j\lambda} - \tilde{\omega}_{j\lambda} \overline{\tilde{\omega}}_{i\lambda}) = \sum_{(kh)} R_{ij,kh} (\omega_k \overline{\omega}_h - \omega_h \overline{\omega}_k). \end{cases}
$$

---

[1]) Voir E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Chapitre VIII (Paris, Gauthier-Villars, 1922).

Un élément à p dimensions E_p issu d'un point est dit **intégral** si tous ses éléments linéaires sont intégraux et en involution deux à deux.

Un système de Pfaff à n variables indépendantes est en involution si par tout élément intégral arbitraire E_i, il passe au moins un élément intégral E_{i+1}, i prenant successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$ 1. Si par un élément intégral arbitraire E_{n-1} il passe un seul élément intégral E_n, et si par un élément intégral arbitraire E_{n-2}, il passe ∞^r éléments intégraux E_{n-1}, la solution **générale** du système donné dépend de r fonctions arbitraires de $n-1$ arguments.

3. Nous pouvons toujours supposer, sans restreindre la généralité, que tout élément intégral E_i est engendré par i éléments linéaires pour chacun desquels un et un seul des paramètres directeurs ω_i est différent de zéro; nous supposerons $\omega_1 = 1$ pour le premier élément linéaire, $\omega_2 = 1$ pour le second et ainsi de suite. Le $k^{\text{ième}}$ élément linéaire ($\omega_k = 1$) sera défini par les valeurs $\gamma_{i\alpha_k}$ des paramètres directeurs $\tilde{\omega}_{i\alpha}$. Nous regarderons ces quantités $\gamma_{i\alpha k}$, pour i et k fixés et α variable, comme les projections d'un vecteur (γ_{ik}) dans un espace auxiliaire à $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dimensions.

Pour nous orienter dès à présent, nous pouvons remarquer que les premières équations (9) appliquées au $k^{\text{ième}}$ et $h^{\text{ième}}$ élément linéaire de E_i $(k, h \leq i)$, s'écrivent simplement

$$(\gamma_{kh}) = (\gamma_{hk}).$$

Cela posé considérons d'abord un élément intégral arbitraire E_1 $(\omega_1 = 1, \omega_2 = \ldots = 0)$ défini par les n vecteurs

$$(\gamma_{11}), (\gamma_{21}), \ldots, (\gamma_{n1}).$$

Tout élément intégral E_2 contenant E_1 sera défini par un second élément linéaire $(\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 1,\ \omega_3 = \ldots = 0)$, lequel sera lui-même défini par n nouveaux vecteurs,

$$(\gamma_{12}), (\gamma_{22}), \ldots, (\gamma_{n2}).$$

Les équations (9) donnent les conditions auxquelles ils doivent satisfaire sous la forme

$$(10)\begin{cases} (\gamma_{12}) = (\gamma_{21}), \\ \{ij, 12\} \equiv (\gamma_{i1})(\gamma_{j2}) - (\gamma_{j1})(\gamma_{i2}) - R_{ij12} = 0 \ (i, j = 1, 2, \ldots, n); \end{cases}$$

les produits qui s'introduisent dans les premiers membres des dernières équations sont des produits scalaires.

La première équation (10) donne (γ_{12}); l'équation $\{12, 12\} = 0$ donne ensuite le produit scalaire de (γ_{11}) par (γ_{22}); le vecteur (γ_{22}) étant choisi arbitrairement en tenant compte de cette condition, les équations $\{13, 12\} = 0$, $\{23, 12\} = 0$ donnent les produits scalaires du vecteur (γ_{32}) par les vecteurs (γ_{11}) et (γ_{21}); le vecteur (γ_{32}) étant choisi arbitrairement en tenant compte de ces conditions, on aura de même (γ_{42}) et ainsi de suite. Le dernier vecteur (γ_{n2}) sera donné par ses projections sur $(\gamma_{11}), (\gamma_{21}), \ldots (\gamma_{n-1,1})$.

On voit que l'existence de E_2 est assurée si les $n-1$ vecteurs $(\gamma_{11}), (\gamma_{21}), \ldots, (\gamma_{n-1,1})$ sont linéairement indépendants, ce qui arrivera en général puisqu'ils sont arbitraires et que la dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de l'espace auxiliaire est supérieure à $n-1$.

On voit même que dans l'élément intégral E_2 le plus général contenant E_1, les vecteurs

$$(\gamma_{11}), (\gamma_{21}), \ldots, (\gamma_{n-1,1}), (\gamma_{22}), \ldots, (\gamma_{n-1,2})$$

seront eux-mêmes linéairement indépendants; en effet la condition qu'un vecteur ait des projections données sur un certain nombre de vecteurs indépendants, le laisse linéairement indépendant (en général) de ces vecteurs, tant qu'on n'arrive pas à un nombre de vecteurs dépassant la dimension de l'espace.

4. Supposons maintenant qu'on ait démontré pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$ l'existence d'un élément intégral E_{i+1} contenant un élément intégral arbitraire E_i. L'élément E_{i+1} sera défini par les vecteurs (γ_{kh}) $(k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, i+1)$ satisfaisant à la loi de symétrie $(\gamma_{kh}) = (\gamma_{hk})$ et tels de plus que tous ceux de ces vecteurs pour lesquels aucun indice n'est égal à n soient linéairement indépendants. Nous allons étendre cette propriété de p à $p+1$.

L'élément intégral E_{p+1} cherché est défini par n nouveaux vecteurs

$$(\gamma_{1,p+1}), (\gamma_{2,p+1}), \ldots, (\gamma_{n,p+1}).$$

Les relations (9) donnent d'abord

$$(\gamma_{i,p+1}) = (\gamma_{p+1,i}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Il faut ajouter les relations

$$\{ij, k\overline{p+1}\} = 0. \qquad (ij = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, p). \tag{11}$$

Parmi ces relations, il y en a qui ne contiennent aucun des vecteurs inconnus

$$(\gamma_{p+1,p+1}), \ldots, (\gamma_{n,p+1});$$

ce sont celles pour lesquelles les indices i et j sont tous les deux inférieurs à $p+1$. Mais en vertu des relations (2) et des relations de symétrie existant entre les vecteurs déjà connus, on a

$$\{ij, k\overline{p+1}\} \equiv \{k\overline{p+1}, ij\},$$

de sorte que les équations en question sont déjà vérifiées d'elles-mêmes.

Considérons maintenant une des relations (11) pour lesquelles l'un des deux premiers indices, j par exemple, est plus grand que p, l'autre i étant inférieur à $p+1$; cette relation ne contient que le vecteur inconnu $(\gamma_{j,p+1})$. Nous allons montrer que les deux relations (11), où on échange i et k, sont équivalentes. En effet on a

$$\{ij, k\overline{p+1} \equiv (\gamma_{ik})(\gamma_{j,k+1}) - (\gamma_{jk})(\gamma_{i,p+1}) - R_{ij,k\overline{p+1}},$$
$$\{kj, i\overline{p+1}\} \equiv (\gamma_{ki})(\gamma_{j,p+1}) - (\gamma_{ji})(\gamma_{k,p+1} - R_{kj,i\overline{p+1}}.$$

Ces deux relations donnent chacune une valeur déterminée pour le produit scalaire $(\gamma_{ik})(\gamma_{j,p+1})$. Ces deux valeurs sont égales; en effet on a auparavant considéré la relation

$$\{j\overline{p+1}, ik\} \equiv (\gamma_{ji})(\gamma_{p+1,k}) - (\gamma_{jk}\gamma_{p+1,i}) - R_{j\overline{p+1},ik} = 0.$$

Or on a identiquement, en tenant compte des relations de symétrie déjà obtenues et des relations (2),

$$\{ij, k\overline{p+1}\} = \{kj, i\overline{p+1}\} - \{j\overline{p+1}, ik\} \equiv 0.$$

Cela posé, les relations (11), où on fera successivement

$$j = p+1, \quad k \leq i < j; \quad k \leq p;$$
$$j = p+2, \quad k \leq i < j; \quad k \leq p;$$
$$\text{— — — — — — — — —}$$
$$j = n, \quad k \leq i < j; \quad k \leq p;$$

définiront successivement les vecteurs

$$(\gamma_{p+1,p+1}), (\gamma_{p+2,p+1}), \ldots, (\gamma_{n,p+1})$$

par leurs projections sur un certain nombre de vecteurs linéairement indépendants (γ_{ik}): en général ceux de ces vecteurs dont les deux indices sont différents de n seront linéairement indépendants des vecteurs précédemment trouvés à indices inférieurs à n.

En particulier, si $p = n - 1$, on voit que le seul vecteur inconnu (γ_{nn}) est défini par ses projections sur les $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs linéairement indépendants γ_{ij}, $(i, j \leq n - 1)$; il est donc bien déterminé. Par suite par un élément intégral arbitraire E_{n-1} il passe un élément intégral E_n et un seul.

Si $p = n - 2$, les deux vecteurs inconnus $(\gamma_{n-1,n-1})$ et $(\gamma_{n,n-1})$ sont définis respectivement l'un par ses projections sur le vecteur γ_{ij} à indices inférieurs à $n - 1$, l'autre par ses projections sur les vecteurs γ_{ij} $(i \leq n - 1, j \leq n - 2)$. Le premier vecteur inconnu dépend de $n - 1$ constantes arbitraires et le second d'une dernière constante arbitraire. Par un élément intégral arbitraire E_{n-2} il passe donc ∞^n éléments intégraux E_{n-1}. La conclusion s'en déduit: Le système de Pfaff donné est en involution et sa solution générale dépend de n fonctions arbitraires de $n - 1$ arguments.

5. La démonstration précédente suppose simplement que le ds^2 donné est une forme différentielle quelconque (non dégénérée [1]); elle s'applique au domaine réel et au domaine complexe (les coefficients g_{ij} du ds^2 étant dans ce dernier cas des fonctions analytiques de n variables complexes).

Si l'on voulait étudier les solutions non générales du problème, il y aurait lieu de rechercher les solutions du système de Pfaff (I) pour lequelles tous les éléments intégraux d'un certain ordre seraient singuliers. Par exemple, pour $n = 3$, ces solutions singulières correspondraient aux variétés à 3 dimensions de l'espace euclidien à 6 dimensions dont l'hyperplan osculateur aurait moins de 6 dimensions (éléments linéaires intégraux tous singuliers), ou aux variétés admettant en chaque point une infinité de tangentes asymptotiques engendrant un plan (éléments intégraux E_2 tous singuliers).

Mais toutes ces recherches ne touchent en rien à la validité du théorème de Schlaefli, qui est complètement démontré.

Il est du reste inutile de faire remarquer que la réalisation d'un espace de Riemann donné dans un espace euclidien est purement locale.

---

[1]) Le cas signalé par M. Janet pour $n = 2$, *loc. cit.*, p. 43, correspond à un ds^2 carré parfait.

Sur le changement du système de référence pour un champ électromagnétique déterminé.

Par

S. Zaremba.

Professeur à l'Université de Cracovie.

1. La force électrique e et la force magnétique m dérivant d'un champ électromagnétique déterminé (C) doivent être regardées comme des éléments qui dépendent non seulement du champ (C) lui-même mais aussi du système de référence auquel on rapporte le champ électromagnétique considéré. Le passage d'un système de référence (S) à un autre système de référence (S'), fixe par rapport au premier, n'influe évidemment en rien sur les vecteurs e et m mais il n'en est plus le même [1]) au cas où le système (S') se déplace par rapport au système (S). On est donc conduit à envisager le problème suivant:

I. Problème. *Connaissant la force électrique e et la force magnétique m d'un champ électromagnétique (C) par rapport à un système de coordonnées (S), déterminer les éléments analogues e' et m' relatifs à un système de coordonnées (S') qui se déplace d'une facon donnée par rapport au système (S).*

Il est très aisé de voir que le problème précédent équivaut au suivant:

II. Problème. *Les forces électrique et magnétique dérivant d'un champ électromagnétique (C) étant données par rapport à un certain système de coordonnées (S), déterminer les forces dérivant du champ (C) et qui solliciteraient un pôle électrique et un pôle magnétique*

---

[1]) S. Zaremba, Sur un groupe de transformations qui se présente en électrodynamique. Voir p. 3 du T. V, année 1926 de ces Annales.

d'intensités égales à l'unité, ces pôles se déplaçant suivant une loi donnée par rapport au système de coordonnées (S).

D'autre part, les physiciens admettent implicitement l'hypothèse que voici:

III. **Hypothèse.** *Le mouvement de chacun des deux pôles considérés dans l'énoncé II n'influe sur la force dérivant du champ (C) et le sollicitant à un instant t que par la vitesse par rapport au système (S) du pôle considéré à l'époque t.*

Cette hypothèse étant admise, il résulte de l'équivalence des problèmes I et II que le cas général du problème I se ramène au cas particulier où le système (S') est animé par rapport au système (S) d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Or, dans le mémoire rappelé plus haut, j'ai étudié ce cas particulier en supposant que le champ électromagnétique (C) soit situé dans le vide et j'ai ramené la question à l'intégration d'un certain système d'équations aux dérivées partielles. Il y a donc intérêt à intégrer ce systéme d'équations aux dérivées partielles et à en discuter les intégrales. Tel sera précisément le sujet du mémoire actuel.

C'est dans le dernier numéro du mémoire, le No. 12 que l'on trouvera la discussion des intégrales précédentes ainsi que la conclusion générale qui s'en dégage.

2. Pour formuler les résultats que j'ai obtenus, dans le mémoire cité plus haut, j'admettrai que chacun des systèmes (S) et (S') soit un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, les axes de mêmes numéros dans les deux systèmes étant de même sens. Cela posé, désignons par e_i, m_i, e'_i, m'_i, et u_i $(i = 1, 2, 3)$ respectivement les projections orthogonales sur l'axe de numéro i du système (S) {ou, ce qui revient au même, du système (S')} des vecteurs e, m, e', m' et du vecteur u représentant la vitesse du système (S') par rapport au système (S) et posons

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= \sum_{i=1}^{3} e_i^2, \\ a_2 &= \sum_{i=1}^{3} m_i^2, \\ a_3 &= \sum_{i=1}^{3} e_i\, m_i. \end{aligned} \right.$$

(2) $$n_i = e_{i+1} \cdot m_{i+2} - e_{i+2} \cdot m_{i+1}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

En se reportant aux formules (19) et (20) de la p. 9. du mémoire, cité à la p. 8 du travail actuel, on reconnaîtra que, selon la théorie que j'ai développée, on a:

(3) $$\begin{cases} e_i' = p_1(u_{i+1}\, e_{i+2} - u_{i+2}\, e_{i+1}) + p_2(u_{i+1}\, m_{i+2} - u_{i+2}\, m_{i+1}) + \\ \qquad + p_3(u_{i+1}\, n_{i+2} - u_{i+2}\, n_{i+1}). \\ m_i' = q_1(u_{i+1}\, e_{i+2} - u_{i+2}\, e_{i+1}) + q_2(u_{i+1}\, m_{i+2} - u_{i+2}\, m_{i+1}) + \\ \qquad + q_3(u_{i+1}\, n_{i+2} - u_{i+2}\, n_{i+1}) \\ \qquad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

où

(4) $$p_1;\ p_2,\ p_3,\quad q_1\cdot\ q_2,\ q_3$$

sont des fonctions des seules variables α_1, α_2, α_3, définies par les formules (1), fonctions vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles (23), p. 10 du mémoire cité plus haut.

3. Le système précédent d'équations aux dérivées partielles se simplifie considérablement en prenant pour nouvelles fonctions inconnues les fonctions

(5) $$v_1,\ v_2,\ w,\ M,\ p_3' \text{ et } q_3'$$

définies par les formules suivantes:

(6) $$\begin{cases} v_1 = \alpha_3\, p_2 + \alpha_1\, p_1 \\ v_2 = \alpha_3\, q_1 + \alpha_2\, q_2 \\ w = \alpha_1\, q_1 + \alpha_2\, p_2 + \alpha_3(p_1 + q_2) \\ M = \alpha_1\, q_1 - \alpha_2\, p_2 + \alpha_3(q_2 - p_1) \\ p_3' = p_3\sqrt{\triangle} \quad q_3' = q_3\sqrt{\triangle}, \quad (\sqrt{\triangle} \geqq 0) \end{cases}$$

où

(7) $$\triangle = \alpha_1\, \alpha_2 - \alpha_3^2.$$

Après avoir défini les opérateurs h_1, h_2 et h_3 au moyen des formules

(8) $$\begin{cases} h_1 = \quad 2p_3' \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + \ q_3' \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3}, \\ h_2 = \quad 2q_3' \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + \ p_3' \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3}, \\ h_3 = -2p_2 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2q_1 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + (p_1 - q_2) \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3}, \end{cases}$$

on constate, au moyen d'un calcul facile quoique un peu laborieux, que le système d'équations aux dérivées partielles qui nous occupe équivaut à l'ensemble des quatre suivants:

$$(9) \qquad h_k(v_1) = h_k(v_2) = h_k(w) = 0, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$(10) \qquad \begin{cases} h_1(M) - 2\, q_1\, p_3' + 2 p_1\, q_3' = 0, \\ h_2(M) - 2\, q_2\, p_3' + 2 p_2\, q_3' = 0, \\ h_3(M) + 2(q_1\, p_2 - q_2\, p_1) = 0, \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} h_1(p_3') - (p_1^2 + p_2\, q_1) = 0, \\ h_2(p_3') - p_2(p_1 + q_2) = 0, \\ h_3(p_3') = 0, \end{cases}$$

$$(12) \qquad \begin{cases} h_1(q_3') - q_1(p_1 + q_2) = 0, \\ h_2(q_3') - (q_2^2 + p_2\, q_1) = 0. \\ h_3(q_3') = 0, \end{cases}$$

où, comme cela résulte des formules (6), on a:

$$(13) \qquad \begin{cases} 2 \triangle p_1 = (M - w)\alpha_3 + 2 v_1\, \alpha_2, \\ 2 \triangle p_2 = -(M - w)\alpha_1 - 2 v_1\, \alpha_3, \\ 2 \triangle q_1 = -(M + w)\alpha_2 - 2 v_2\, \alpha_3, \\ 2 \triangle q_2 = -(M + w)\alpha_3 + 2 v_2\, \alpha_1. \end{cases}$$

4. En abordant l'intégration de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12), il convient de porter tout d'abord son attention sur le déterminant D des expressions (8) des operateurs h_1, h_2, h_3, ces opérateurs étant considérés comme des fonctions des expressions

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_3};$$

on a:

$$(14) \qquad D = \begin{vmatrix} 2p_3', & 0, & q_3' \\ 0, & 2q_3', & p_3' \\ -2p_2, & 2q_1, & p_1 - q_2 \end{vmatrix} = 4\{p_2\, q_3'^2 - q_1\, p_3'^2 + (p_1 - q_2) p_3'\, q_3'\}.$$

Cela posé, nous commencerons par l'étude du cas singulier où l'hypothèse suivante est vérifiée.

IV. Hypothèse. A l'intérieur d'un certain domaine (T), situé dans l'espace arithmétique $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on a identiquement

$$(15) \qquad D = 0.$$

V. Théorème. Lorsque les systèmes d'équations (9), (10), (11) et (12) sont vérifiés, l'hypothèse IV équivaut à la suivante: dans tout le domaine (T) on a identiquement

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0 \tag{16}$$

$$p_1 q_3' - q_1 p_3' = 0 \tag{17}$$

$$p_2 q_3' - q_2 p_3' = 0. \tag{18}$$

En effet, il est très aisé de voir que les égalités (17) et (18) entraînent l'égalité (15) car l'expression (14) de D donne:

$$D = 4 q_3'(p_2 q_3' - q_2 p_3') + 4 p_3'(p_1 q_3' - q_1 p_3'); \tag{19}$$

il suffira donc de prouver que l'hypothèse IV entraine l'existence des égalités (16), (17) et (18) dans tout le domaine (T). Supposons donc que cette hypothèse soit vérifiée. Il résulte alors des systèmes d'équations (11) et (12) que tous les déterminants du 3-ième degré appartenant à la matrice

$$\left|\begin{matrix} 2p_3', & 0, & q_3' & , & p_1^2 + p_2 q_1, & q_1(p_1 + q_2) \\ 0, & 2q_3', & p_3' & , & p_2(p_1 + q_2), & q_2^2 + p_2 q_1 \\ -2p_2, & 2q_1, & p_1 - q_2, & & 0 \quad , & 0 \end{matrix}\right. \tag{20}$$

devront être nuls. Désignons pour un moment d'une façon générale par (i, j, k) le déterminant de degré 3 qui a pour première, deuxième et troisième colonnes respectivement les colonnes de numéros i, j et k le la matrice (20); nous aurons

$$(i, j, k) = 0. \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{21}$$

Considérons en particulier parmi les égalités (21) les trois suivantes:

$$(i, 4, 5) = 0 \qquad (i = 1, 2\ 3) \tag{22}$$

et envisageons les en un point arbitrairement choisi A du domaine (T); à moins d'avoir en A à la fois

$$p_2 = 0, \quad q_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_1 - q_2 = 0, \tag{23}$$

ou conclura de (22) à l'existence au point A de l'égalité:

$$\begin{vmatrix} p_1^2 + p_2 q_1\,, & q_1(p_1 + q_2) \\ p_2(p_1 + q_2), & q_2^2 + p_2 q_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

équivalente à l'égalité (16), car le déterminant (24) est identiquement égal à $(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2$.

A cause de la continuité des fonctions p_1, p_2, q_1 et q_2, on serait encore en droit d'affirmer l'existence en A de l'égalité (16) même si en ce point lui-même les égalités (23) étaient vérifiée mais si le point considéré A était un point-limite des points en chacun desquels l'une au moins des égalités (23) n'aurait pas lieu.

Donc, l'existence de l'égalité (16) en A ne serait douteuse qu'au cas où ce point serait situé à l'intérieur de quelque domaine (Ω) dans toute l'étendue duquel chacune des égalités (23) aurait lieu. Mais, dans ce cas, comme cela résulte de la 4-ième des formules (6), on aurait dans tout le domaine (D)

$$M = 0.$$

Donc, en vertu de la 3-ième des équations (10), l'égalité (16) aurait lieu dans tout le domaine (Ω) et en particulier en A. En définitive l'égalité (16) subsistera dans tout le domaine (T).

Utilisons maintenant parmi les égalités (21) les deux suivantes:

$$(2,\ 3,\ 4) = 0 \quad \text{et} \quad (2,\ 3,\ 5) = 0 \tag{25}$$

en ayant soin, pour les développer, de tenir compte de ce que l'égalité (16) entraîne les deux suivantes:

$$p_1^2 + p_2 q_1 = p_1(p_1 + q_2)$$

et

$$q_2^2 + p_2 q_1 = q_2(p_1 + q_2).$$

On trouvera aisément:

$$2(p_1 + q_2)\, p_1 (p_1 q_3' - q_1 p_3') = 0$$

$$2(p_1 + q_2)\, q_1 (p_1 q_3' - q_1 p_3') = 0.$$

Multiplions la première de ces égalités par q_3' et la deuxième par $-p_3'$. Après avoir ajouté membre à membre les équations obtenues, on trouvera:

$$2(p_1 + q_2)(p_1 q_3' - q_1 p_3')^2 = 0. \tag{26}$$

D'une façon analogue on conclura des égalités

$$(1,\ 3,\ 4) = 0 \quad \text{et} \quad (1,\ 3,\ 5) = 0$$

à la suivante:

$$2(p_1 + q_2)\,(p_2 q_3' - q_2 p_3')^2 = 0. \tag{27}$$

Il résulte des égalités (26) et (27) que les égalités (17) et (18) subsisteront en tout point du domaine (T) sauf peut être au cas où, au point considéré, on aurait,

$$p_1 + q_2 = 0. \tag{28}$$

Supposons donc qu'en quelque point A du domaine (T) l'égalité (28) ait lieu. En se reportant à la formule (14) et en tenant compte de l'égalité (16) ou s'assurera aisément que l'égalité (28) entraîne les deux suivantes:

$$q_1 D = -4(p_1 q_3' - q_1 p_3')^2$$

$$p_2 D = -4(p_2 q_3' - q_2 p_3')^2.$$

Donc, puisque, par hypothèse, nous avons l'égalité (15), nous avons aussi les deux égalités (17) et (18). En définitive notre théorème est complètement démontré.

VI. Remarque. L'ensemble des égalités (17) et (18) équivaut à l'intérieur du domaine désigné par (T) dans l'énoncé IV (p. 11) aux deux suivantes:

$$\begin{cases} 2v_1 q_3' - (w + M) p_3' = 0, \\ (w - M) q_3' - 2v_2 p_3' = 0. \end{cases} \tag{29}$$

En effet, si l'on désigne pour un instant par F_1 et F_2 les 1-iers membres de (17) et (18) et si l'on se reporte aux formules (6), on reconnaît de suite que les premiers membres des égalités (29) représentent les expressions suivantes:

$$2\alpha_1 F_1 + 2\alpha_3 F_2 \quad \text{et} \quad 2\alpha_3 F_1 + 2\alpha_2 F_2,$$

circonstance qui prouve l'équivalence du système (29) et du système formé par l'ensemble des égalités (17) et (18) au moins dans la partie commune aux domaines (T) et au domaine

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \neq 0.$$

Cela posé, il suffit de tenir compte de la continuité des fonctions que l'on a à considérer pour reconnaître la complète exactitude de notre remarque.

VII. Remarque. L'hypothèse IV (p. 11) étant vérifiée, il résulte du théorème V que le système (10) se réduit au suivant

$$h_k(M) = 0; \qquad (k = 1, 2, 3)$$

par conséquent, lorsque l'hypothèse IV est vérifiée, le système d'équations aux dérivées partielles du problème se compose des équations

$$(30) \qquad h_k(v_1) = h_k(v_2) = h_k(w) = h_k(M) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

et des systèmes (11) et (12).

VIII. Théorème. Pour effectuer l'étude complète du cas où l'hypothèse IV (p. 11) est vérfiée, il suffit d'envisager successivement les cas où l'on aurait, dans tout le domaine (T), en dehors de l'égalité (15), l'un des systèmes de relations suivants:

$$(31) \qquad p'_3 \neq 0, \quad q'_3 \neq 0;$$

$$(32) \qquad p'_3 \neq 0, \quad q'_3 = 0;$$

$$(33) \qquad p'_3 = 0, \quad q'_3 \neq 0;$$

$$(34) \qquad p'_3 = q'_3 = 0.$$

Le théorème précédent n'est pas tout à fait évident car il pourrait arriver qu'en un point A, situé à l'intérieur du domaine (T) l'un des systèmes de relations (32), (33) ou (34) soit vérifié, sans l'être à l'intérieur d'un domaine, à l'intérieur duquel se trouverait le point A. Mais, si cette circonstance se présentait, le point A serait un point-frontière d'un domaine, (T') à l'intérieur duquel l'un des systèmes de relations (31), (32), (33) ou (34) serait vérifié, donc, connaissant les fonctions (5) à l'intérieur du domaine (T'), on les connaîtrait aussi, à cause de leur continuité, au point A, à moins que ce point ne fasse pas partie du domaine d'existence des fonctions considérées. Notre théorème est donc démontré.

IX. Théorème. L'hypothèse IV (p. 11) étant vérifiée, lorsque l'une au moins des fonctions p'_3 et q'_3 reste différente de zéro dans le domaine (D), en d'autre termes, lorsque l'un des trois premiers cas énumeres dans la théorème VIII est réalisé, le système d'équations aux dérivées partielles du problème (VII, p. 14) se réduit à celui qui forment les équations

$$(35) \qquad h_k(v_1) = h_k(v_2) = h_k(w) = h_k(M) = 0, \qquad (k = 1, 2)$$

conjointement avec les deux systèmes suivants:

$$(36) \qquad \begin{cases} h_1(p'_3) - (p_1^2 + p_2\, q_1) = 0, \\ h_2(p'_3) - p_2(p_1 + q_2) = 0, \end{cases}$$

et

$$(37)\quad \begin{cases} h_1(q_3') - p_1(p_1 + q_2) = 0, \\ h_2(q_3') - (q_2^2 + p_2\, q_1) = 0. \end{cases}$$

En effet, dans le cas actuel on a {V, p. 12} les égalités (16), (17) et (18), égalités qui expriment, comme on le reconnaîtra sans peine, que tous les déterminants du 3-ième ordre appartenant à la matrice (20) sont nuls. D'autre part, puisque, par hypothèse, l'une au moins des fonctions p_3' et q_3' est différente de zéro, la matrice

$$\begin{matrix} 2p_3', & 0, & q_3', \\ 0, & 2q_3', & p_3', \end{matrix}$$

est d'ordre 2. Par conséquent dans chacun des quatre systèmes de trois équations dont se compose le système (30) ainsi que dans chacun des systèmes (11) et (12) la 3-ième équation est une conséquence des deux premières.

Il résulte de là que l'ensemble des systèmes (35), (36) et (37) se déduit du système qui, selon la remarque VII, contient *toutes* les équations aux dérivées partielles du problème, par la suppression d'équations qui sont des conséquences de celles que l'on conserve. Notre théorème est donc établi.

5. Commençons par l'étude du premier des quatre cas énumérés dans le théorème VIII (p. 15).

Il résulte de l'égalité (16) {V, p. 12} que l'on a:

$$(37,_1)\quad \begin{matrix} p_1^2 + p_2\, q_1 = p_1(p_1 + q_2) \\ q_2^2 + p_2\, q_1 = q_2(p_1 + q_1). \end{matrix}$$

Cette remarque faite, il résulte des égalités (17) et (18) que les systèmes (36) et (37) entraînent les équations suivantes:

$$(38)\quad q_3'\, h_k(p_3') - p_3'\, h_k(q_3') = 0. \qquad (k = 1,\ 2)$$

J'observe maintenent que rien n'empêche de poser

$$(39)\quad \lambda = \frac{q_3'}{p_3'}$$

puisque, par hypothèse, on a

$$(40)\quad p_3'\, q_3' \neq 0.$$

Transformons maintenant les équations du problème en prenant la fonction λ pour inconnue auxiliaire et, à cet effet, posons

(41) $$\left\{\begin{aligned} \nu_1 &= 2\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha_3} \\ \nu_2 &= 2\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (38) seront alors équivalentes aux suivantes

(42) $$\nu_1(\lambda)=0,\quad \nu_2(\lambda)=0,$$

lesquelles, sous forme développée, s'écrivent ainsi:

(43) $$2\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_1}+\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_3}=0,\quad 2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_3}=0.$$

D'autre part, après avoir posé,

(44) $$f=p_3'^2$$

on pourra, (en égard à $(37,_1)$) donner aux équations (36) la forme suivante:

(45) $$\left\{\begin{aligned} \nu_1(f)-2p_1(p_1+q_2)=0, \\ \nu_2(f)-2p_2(p_1+q_2)=0. \end{aligned}\right.$$

L'inégalité (40) étant vérifié par hypothèse, l'ensemble des équations (36) et (37) équivaut à l'ensemble des équations (36) et (38), équivalent lui-même à l'ensemble des équations (42) et (45). Mais l'inégalité (40) entraîne encore cette conséquence que le système (35) équivaut au suivant:

(46) $$\nu_k(v_1)=\nu_k(v_2)=\nu_k(w)=\nu_k(M)=0. \qquad (k=1,2).$$

Donc {IX, p. 15}, nous avons le téorème suivant:

X. **Théorème.** Le système d'équations aux dérivées partielles du problème peut être consideré comme se composant des systèmes (42), (45) et (46).

XI. **Théorème.** L'hypothèse IV (p. 11) et l'inégalité (40) étant vérifiés, l'ensemble des équations du problème peut être regardé comme se composant des systèmes d'équations aux dérivées partielles (42) et (45), du système

(47) $$\nu_k(v_1)=\nu_k(v_2)=0 \qquad (k=1,2)$$

ainsi que des équations (13), de l'équation (39) et des deux équations suivantes

(48) $$\left\{\begin{aligned} w+M &= 2v_1\lambda, \\ \lambda(w-M) &= 2v_2. \end{aligned}\right.$$

En effet les équations (47) {X} seront certainement vérifiées, en égard à (39), il en sera de même {VI, p. 14} des équations (48), enfin les équations (13) et (39) seront verifiées en vertu de la définition des fonctions v_1, v_2, w, M et λ.

Donc, il ne reste à montrer que l'ensemble formé par les systèmes (42), (45), (47), (13) et (48) est un système *complet* d'équations du problème. A cet effet, supposons que toutes les équations de ce système soient vérifiées. Il résulte alors des équations (42) et (47) que les valeurs de w et M tirées de (48) satisferont aux équations:

$$\nu_k(w) = \nu_k(M) = 0. \qquad (k = 1, 2)$$

Par conséquent toutes les équations aux dérivées partielles du problème {X, p. 17} seront vérifiées. Mais, à cause de (39) et (40) les équations (48) entraînent les équations (29), équivalentes {VI, p. 14} aux équations (17) et (18) lesquelles, en vertu de la formule (19), entraînent l'égalité

$$D = 0.$$

En définitive, notre théorème est complètement démontré.

Après avoir porté les valeurs de $M - w$ et $M + w$ tirées des équations (48) dans les formules (13) (p. 11), on trouvera:

$$(49) \quad \begin{cases} \Delta . p_1 = -\dfrac{v_2}{\lambda}\alpha_3 + v_1\alpha_2, \\ \Delta . p_2 = \dfrac{v_2}{\lambda}\alpha_1 - v_1\alpha_3, \\ \Delta . q_1 = v_1\lambda\alpha_2 - v_2\alpha_3, \\ \Delta . q_2 = -v_1\lambda\alpha_3 + v_2\alpha_1. \end{cases}$$

Les formules précédentes donnent:

$$\Delta^2 . \lambda^2 p_1(p_1 + q_2) = (\lambda v_1\alpha_2 - v_2\alpha_3)\{v_1\lambda(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) + + v_2(\lambda\alpha_1 - \alpha_3)\} = \lambda^2 v_1^2\alpha_2(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) + + \lambda v_1 v_2\{\lambda\Delta - 2\alpha_3(\alpha_2 - \lambda\alpha_3)\} + v_2^2\{\alpha_1(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) - \Delta\} = + \{\lambda^2 v_1^2\alpha_2 + v_2^2\alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2\alpha_3\}(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) - v_2^2\Delta + \lambda^2 v_1 v_2\Delta,$$

d'où

$$p_1(p_1 + q_2) = \frac{\{\lambda^2 v_1^2\alpha_2 + v_2^2\alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2\alpha_3\}(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) - v_2^2\Delta + \lambda^2 v_1 v_2\Delta}{\Delta^2 . \lambda^2}.$$

En portant la valeur précédente de l'expression $p_1(p_1 + q_2)$

et la valeur de l'expression $p_2(p_1 + q_2)$, obtenue d'une façon analogue, dans les équations (45), on trouve

$$(50) \begin{cases} v_1(f) - 2\dfrac{(\lambda^2 v_1^2 v_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) - v_2^2 \Delta + \lambda^2 v_1 v_2 \Delta}{\Delta . \lambda^2} = 0 \\ v_2(f) - 2\dfrac{(\lambda^2 v_1^2 \alpha_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)(\alpha_3 - \lambda\alpha_1) - \lambda^3 v_1^2 \Delta + \lambda v_1 v_2 \Delta}{\Delta . \lambda^2} = 0. \end{cases}$$

J'observe maintenant que l'ensemble des intégrales communes des équations (42) ou ce qui revient au même, des équations (43) se compose de celles que donne l'équation

$$(51) \qquad \lambda = C$$

où C représente une constante arbitraire et de celles que fournit l'équation

$$(52) \qquad \alpha_1 \lambda^2 - 2\alpha_3 \lambda + \alpha_2 + \theta(\lambda) = 0$$

où $\theta(\lambda)$ représente une fonction de λ continue avec sa dérivée première mais à cela près quelconque.

1-ier cas. La fonction λ est donné par la formule (51). Pour que cette valeur de λ soit admissible il faut, comme cela résulte de la condition (40) et de la formule (39) que l'on ait

$$(53) \qquad C \neq 0.$$

Posons pour abréger

$$(54) \qquad \zeta = \alpha_1 C^2 - 2\alpha_3 C + \alpha_2$$

Les équations (47) donnent:

$$(55) \qquad v_1 = \varphi(\zeta), \quad v_2' = \psi(\zeta)$$

où $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ sont des fonctions de ζ définies dans un même intervalle, continues avec leurs dérivées premières, mais à cela près arbitraires.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer l'expression générale d'une intégrale commune des équations (50). A cet effet, prenons pour nouvelles variables la variable ζ définie par la formule (54) ainsi que les variables

$$(56) \qquad \xi_1 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2.$$

A cause le l'inégalité (53) il sera toujours permis d'effectuer le changement de variables précédent. Nous aurons

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \xi_1} = \frac{C}{2}, \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial \xi_2} = \frac{1}{2C}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} = \xi_2 - C\alpha_3, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} = \xi_1 - \frac{\alpha_3}{C}$$

$$\nu_1(f) = 2\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \nu_2(f) = 2C\frac{\partial f}{\partial \xi_2}$$

Cela posé, on s'assurera aisément que les équations (50) donnent une expression de f ou, ce qui revient au même {voir la formule, (44)}, une expression de $p_3'^2$ qui, après le retour aux variables α_1, α_2, α_3 peut s'écrire ainsi:

$$(57) \qquad p_3'^2 = \frac{2Cv_1v_2\alpha_3 - C^2v_1^2\alpha_2 - v_2^2\alpha_1}{C^2\Delta} + F(\zeta)$$

où $F(\zeta)$ représente une fonction de ζ continue avec sa dérivée première mais à cela près arbitraire, le symbole ζ étant défini par la formule (54).

En définitive, dans le cas considéré, le problème est complètement resolu.

2-ième cas. La fonction λ est donnée par une équation de la forme (52). Dans ce cas la fonction λ ne se réduira pas à une constante, les équations (47) donneront

$$(58) \qquad v_1 = \varphi(\lambda), \quad v_2 = \psi(\lambda)$$

où $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ représente des fonctions de λ, continues et ayant chacune une dérivée première continue, mais à cela près quelconques, enfin, il sera permis de transformer les équations (50) en prenant pour nouvelles variables indépendantes la fonction λ et les variables ξ_1 et ξ_2 définies par les équations (56). En tenant compte des équations (42), ou trouvera sans peine:

$$\nu_1(f) = 2\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \nu_2(f) = 2\lambda\frac{\partial f}{\partial \xi_2};$$

d'autre part, puisque l'équation (52) donne

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \xi_1} = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial \xi_2} = \frac{1}{2\lambda},$$

ou aura

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} = \xi_2 - \alpha_3\lambda, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} = \xi_1 - \frac{\alpha_3}{\lambda} = \frac{\lambda\xi_1 - \alpha_3}{\lambda},$$

donc, en définitive, les équations (50) prendront la forme suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{(\lambda^2 v_1^2 \xi_2 + v_2^2 \xi_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)\dfrac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} - v_2^2 \Delta + \lambda^2 v_1 v_2 \Delta}{\lambda^2 . \Delta},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \frac{(\lambda^2 v_1^2 \xi_2 + v_2^2 \xi_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)\dfrac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} - \lambda^2 v_1^2 \Delta + v_1 v_2 \Delta}{\lambda^2 . \Delta}.$$

Ces équations fournissent une expression de f, c'est-à-dire de $p_3'^2$ {voir la formule (44)}, qui, après le retour aux variables initiales α_1, α_2, α_3, peut s'écrire comme il suit:

(59) $$p_3'^2 = -\frac{\lambda^2 v_1^2 \alpha_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3}{\lambda^2 \Delta} + F(\lambda)$$

où $F(\lambda)$ est une fonction arbitraire de λ, assujettie seulement à être continue avec sa dérivée première.

Il est evident que les formules (58) et (59), conjointement avec les formules (49), (44) et (39) et l'équation (52) font connaître la solution générale du problème.

6. Passons à l'étude du 2-ième et du 3-ième des cas énumérés dans le théorème VIII (p. 15).

Soit d'abord

(60) $$p_3' \neq 0, \quad q_3' = 0.$$

En vertu de ces relations, les équations (17) et (18) {V, p. 12} donnent

(61) $$q_1 = 0, \quad p_2 = 0$$

et, par conséquent {VI, p. 14}, on a aussi

(61) $$M + w = 0, \quad v_2 = 0.$$

Cela posé, en se reportant au théorème IX (p. 15), on constate que les équations aux dérivées partielles du problème se réduisent au système suivant;

(63) $$h_k(v_1) = h_k(M - w) = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

(64) $$\begin{cases} h_1(p_3') = p_1^2 \\ h_2(p_3') = p_2 p_1 \end{cases}$$

car, en vertu des solutions (60), (61) et (62,) l'ensemble des

équations (63) et (64) entraîne toutes les équations énumérées dans le théorème IX (p. 15). D'autre part, il résulte des relations (60) et des formules (8) (p. 10) que les symboles de dérivation h_1 et h_2 prennent la forme suivante

$$h_1 = 2p_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad h_2 = p_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_3}.$$

Cela étant, les équations (63) donnent

$$(65) \qquad v_2 = \varphi(\alpha_2), \quad M - w = \psi(\alpha_2)$$

où chacune des fonctions $\varphi(\alpha_2)$ et $\psi(\alpha_2)$ est une fonction arbitraire de α_2 à cela près qu'elle doit être une fonction continue avec sa dérivée première. Quant aux équations (64), elles sont équivalentes aux suivantes:

$$(66) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = p_1^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = 2p_1 p_2,$$

où l'on a posé (comme précédemment)

$$(67) \qquad f = p_3'^2.$$

Les équations (65) et (13) (p. 11) donnent

$$(68) \qquad \begin{cases} 2\Delta p_1 = \psi(\alpha_2)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\,\alpha_2, \\ 2\Delta p_2 = -\psi(\alpha_2)\,\alpha_1 - 2\varphi(\alpha_2)\,\alpha_3. \end{cases}$$

En s'appuyant sur ces formules, on vérifient aisément que l'expression générale de l'intégrale commune des équations (66) est la suivante

$$(69) \qquad f = -\frac{\{\psi(\alpha_2)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\,\alpha_2\}^2}{4\alpha_2 \Delta} + F(\alpha_2)$$

où $F(\alpha_2)$ est une fonction arbitraire de α_2, assujettie seulement à être continue avec sa dérivée première.

Il est aisé de voir que les (68), (67) et (69), avec les égalités (61) et l'égalité qui constituent la 2-ième du relations (60) font connaître la solution générale du problème dans le cas considéré. En effet, toutes les équations aux dérivées partielles du problème seront visiblement vérifiées; d'autre part puisque les égalités

$$q_1 = q_2 = q_3' = 0$$

entraînent les égalités (17) et (18) (p. 12), on aura aussi {formule (19), p. 12}

$$D = 0,$$

de sorte que toutes les conditions du problème seront remplies.

Si au lieu de partir de l'hypothése (60), nous étions parti de la suivante

(70) $$p_3' = 0, \quad q_3' \neq 0,$$

nous aurions trouvé pour nos inconnues les expressions suivantes:

(71) $$p_1 = p_2 = p_3' = 0$$

(72) $$\begin{cases} 2\Delta q_1 = -\psi(\alpha_1)\,\alpha_2 - 2\varphi(\alpha_1)\,\alpha_3, \\ 2\Delta q_2 = +\psi(\alpha_1)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\,\alpha_2, \\ q_3'^2 = -\dfrac{\{\psi(\alpha_1)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\,\alpha_2\}^2}{4\alpha_1\Delta} + F(\alpha_1), \end{cases}$$

où $\varphi(\alpha_1)$, $\psi(\alpha_1)$ et $F(\alpha_1)$, représentent des fonctions arbitraires de α_1, assujetties seulement à être continues avec leurs dérivées premières.

7. Pour épuiser l'étude de tous les cas compatibles avec l'hypothèse IV (p. 11) il nous reste {VIII, p. 15} à étudier notre problème dans le cas où, dans le domaine considéré, on aurait

(73) $$p_3' = q_3' = 0.$$

Nous aurons {V, p. 12}

(74) $$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0.$$

Il résulte des relations (73) et (74) que le système formé par l'ensemble des systèmes (9), (10), (11) et (12) équivaut, dans le cas actuel, au système formé par l'ensemble des deux systèmes d'équations suivant:

(75) $$h_3(v_1) = h_3(v_2) = h_3(w) = h_3(M) = 0$$

et

$$p_1^2 + p_2 q_1 = 0 \quad p_2(p_1 + q_2) = 0,$$
$$q_1(p_1 + q_2) = 0, \quad q_2^2 + p_2 q_1 = 0.$$

Mais, en vertu de (74), ce dernier système équivaut au suivant:

$$p_1(p_1 + q_2) = 0, \quad p_2(p_1 + q_2) = 0,$$
$$q_1(p_1 + q_2) = 0, \quad q_2(p_1 + q_2) = 0,$$

et, comme en ajoutant membre à membre la 1-ière et la 4-ième de ces égalités on trouve

$$(p_1 + q_2)^2 = 0,$$

on arrive aisément à la conclusion suivante: dans le cas considéré le problème se réduit à la détermination des inconnues

(76) $$p_1, p_2, q_1 \text{ et } q_2$$

par la condition qu'elles satisfassent à l'équation (74), à l'équation

(77) $$p_1 + q_2 = 0$$

et aux équations (75) où v_1, v_2, w et M ont les valeurs (6) (p. 10).

Actuellement il y a avantage à remplacer dans les équations (75), les inconnues auxiliaires v_1, v_2, w et M par leurs expressions (6) (p. 10); il vient:

(78) $$h_3(p_1) = h_3(p_2) = h_3(q_1) = h_3(q_2) = 0.$$

En définitive, les équations du problème se composent des équations (74), (77) et (78).

A cause de la continuité des fonctions (76), il suffira d'étudier le cas où, dans tout le domaine considéré on a

(79) $$p_1 = 0$$

et celui où, dans tout ce domaine ou aurait

(80) $$p_1 \neq 0.$$

Dans le premier de ces deux cas les équations (77) et (74) donnent

$$q_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_2 \, q_1 = 0$$

et, dans le 2-ième, il résulte des équations (77) et (74) que l'on aura

$$p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_3 \neq 0.$$

Par conséquent, pour déterminer, dans le cas considéré, toutes les solutions du problème, différentes de la solution évidente

(81) $$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0,$$

il n'y a qu'à envisager successivement les cas où, dans tout le domaine considéré, ou aurait

(82) $$p_1 = q_2 = q_1 = 0, \quad p_2 \neq 0$$

(83) $$p_1 = q_2 = p_2 = 0, \quad q_1 \neq 0$$

(84) $$p_1 p_2 q_1 q_2 \neq 0.$$

Dans le premier le ces cas toutes les équations du problème serons satisfaites identiquement sauf l'équation

$$h_3(p_2) = 0,$$

laquelle {dernière des formules (8) p. 10} se réduit à

$$-2p_2 \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$

d'où

(85) $$p_2 = \text{fonction arbitraire de } \alpha_2 \text{ et } \alpha_3.$$

Dans le 2-ième ces on trouve d'une façon analogue

$$q_1 = \text{fonction arbitraire de } \alpha_1 \text{ et } \alpha_3.$$

Il ne reste donc plus à étudier que le cas où l'inégalité (84) est vérifiée.

Il résulte de la dernière des formules (8) (p. 10) que les équations (78) s'obtiennent en remplaçant, dans l'équation

(86) $$-2p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + 2q_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + (p_1 - q_2) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0$$

la fonction ψ successivement par p_1, p_2, q_1 et q_2. Or, il résulte de (77) que l'équation (86) équivaut à l'équation

$$-p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0,$$

laquelle, comme cela résulte de (84), équivaut à celle-ci:

$$-p_2^2 + p_2 q_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + p_1 p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Mais il résulte des équations (74) et (77) que l'on a

$$p_2 q_1 = p_1 q_2 = -p_1^2.$$

Par conséquent l'équation (86) équivaut à la suivante:

$$-p_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} - p_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + p_1 p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Donc le système (78) équivaut au suivant:

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} -p_2^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}-p_1^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2}+p_1 p_2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_3}&=0\\ -p_2^2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1}-p_1^2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2}+p_1 p_2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_3}&=0\\ -p_2^2\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1}-p_1^2\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_2}+p_1 p_2\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_3}&=0\\ -p_2^2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_1}-p_1^2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2}+p_1 p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_3}&=0 \end{aligned}\right.$$

Mais les équations (77) et (74) donnent

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} q_2&=-p_1,\\ q_1=\frac{p_1}{p_2}q_2&=-\frac{p_1^2}{p_2}=-\frac{p_1}{\lambda} \end{aligned}\right.$$

expressions de q_2 et q_1 qui vérifieront les deux dernières équations du système (87) pourvu que les deux premières soient satisfaites. Il résulte de là que le problème se réduit à l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$-p_2^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}-p_1^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2}+p_1 p_2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_3}=0,$$

$$-p_2^2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1}-p_1^2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2}+p_1 p_2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_3}=0.$$

Pour intégrer ce système posons

$$(89)\quad p_2=\lambda p_1$$

en désignant par λ une inconnue auxiliaire. Il est aisé de voir que la question se ramènera a l'intégration du système suivant:

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned} -\lambda^2\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2}+\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_3}&=0,\\ -\lambda^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2}+\lambda\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_3}&=0. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale générale de la première de ces équations est donnée par l'équation

$$(91)\quad F(\alpha_1+\lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2+\alpha_3,\ \lambda)=0$$

où F est la caractéristique d'une fonction arbitraire des variables

$$\alpha_1+\lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2+\alpha_3 \text{ et } \lambda,$$

assujettie seulement à des conditions de régularité évidentes et telle que l'équation (91) admette par rapport à λ une solution ne se réduisant pas à zéro. La fonction λ étant déterminée, l'expression générale de l'intégrale de la 2-ième des équations (90) sera la suivante:

$$(92) \qquad p_1 = \Phi(\alpha_1 + \lambda\alpha_3, \quad \lambda\alpha_2 + \alpha_3, \lambda)\ ^{1)},$$

où le second membre représente une fonction arbitraire des fonctions

$$(93) \qquad \alpha_1 + \lambda\alpha_3, \quad \lambda\alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{et} \quad \lambda.$$

En définitive, nous avons déterminé toutes les solutions du problème dans le cas que nous avions à étudier dans le numéro actuel.

8. Il ne nous reste plus qu'à intégrer le système formé par l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) dans l'hypothèse où, dans le domaine que l'on considère le déterminant D, défini par la formule (14) (p. 11) satisfait à l'inégalité

$$(94) \qquad D \neq 0;$$

c'est le problème que nous nous proposons de résoudre dans le présent numéro.

Il serait aisé de vérifier que, dans le cas actuel, le système d'équations qu'il s'agit d'intégrer peut être mis sous forme d'un système de six équations aux différentielles totales complètement intégrable mais la méthode que nous allons employer rend superflue la vérification directe, un peu laborieuse, du fait que nous venons de signaler.

XII. Remarque. L'inégalité (94) étant vérifiée dans le domaine que l'on considère, chacune des fonctions v_1, v_2 et w se reduit à une constante.

---

[1]) Si, après avoir disposé de la caractéristique F dans l'équation (91) et après avoir choisi une certaine solution en λ de cette équation, on forme toutes les combinaisons deux à deux des fonctions (93), l'une au moins de ces combinaisons se composera de deux fonctions indépendantes et la fonction p_1 pourra être mise sous forme d'une fonction de ces deux fonctions; toutefois, si l'on considère une combinaison *determinée* de deux des expressions (93), ces expressions pourrons représenter selon la façon dont on disposera des éléments arbitraires dont dépend la fonction λ, ou bien deux fonctions indépendantes des variables α_1, α_2, α_3 ou bien de deux fonctions dont l'une sera une fonction de l'autre; cela étant, pour avoir une expression tout à fait générale de p_1 il a fallu le représenter comme fonction des trois fonctions (93).

C'est en effet ce qui résulte des équations (9) (p. 11) et de la définition du déterminant D.

XIII. Théorème. Lorsqu'à l'intérieur d'un certain domaine (T) l'inégalité (94) est vérifiée, aucune des fonctions p_3' et q_3' ne peut se réduire à zéro dans tout l'intérieur du domaine considéré.

En effet, supposons qu'à l'intérieur d'un certain domaine (T) l'inégalité (94) soit vérifiée et que, contrairement à notre théorème, on ait, dans tout l'intérieur du domaine (T), par exemple

$$p_3' = 0. \tag{95}$$

Les deux prémières équations du système (11) (p. 11) nous donneront

$$p_1^2 + p_2\, q_1 = 0, \quad p_2(p_1 + q_2) = 0. \tag{96}$$

D'autre part, il résulte de (14) (p. 11) et (95) que l'on aura:

$$D = 4p_2\, q_3'^2,$$

par conséquent, en vertu de (94), on aura

$$p_2 \neq 0 \tag{97}$$

et, par suite, la 2-ième des égalités (96) nous donnera

$$p_1 + q_2 = 0,$$

égalité qui, en vertu des 1-ière et 4-ième des formules (13) (p. 11) nous donnera:

$$-2w\alpha_3 + 2v_1\alpha_2 + 2v_2\alpha_1 = 0,$$

pour tout l'intérieur du domaine (T). Or {XII, p. 27} chacune des fonctions w, v_1 et v_2 se réduit à une constante. On a donc nécessairement

$$w = v_1 = v_2 = 0$$

et les formules (13) se réduiront aux suivantes

$$2\Delta p_1 = M\alpha_3,\ 2\Delta p_2 = -M\alpha_1,\ 2\Delta q_1 = M\alpha_2,\ 2\Delta q_2 = -M\alpha_3. \tag{98}$$

En portant les valeurs de p_1, p_2 et q_1, tirées de ces formules dans la première des égalités (96) on trouve

$$M^2(\alpha_3^2 - \alpha_1\,\alpha_2) = 0,$$

d'où

$$M = 0,$$

ce qui, au moyen de la 2-ième des formules (98), donne

$$p_2 = 0,$$

égalité incompatible avec l'égalité (97).

Si en lieu de supposer l'existence de (95) on avait supposé celle de $q_3' = 0$, ou aurait rencontré une contradiction analogue à celle que nous venons de mettre en évidence. Notre théorème est donc démontré.

XIV. Remarque. Il résulte du théorème précédent et de la continuité des fonctions p_3' et q_3' que, sans nuire à la généralité, on peut, comme nous le ferons dorènavant, supposer que, dans tout l'intérieur du domaine considéré on a

$$p_3' \cdot q_3' \neq 0. \tag{99}$$

Introduisons maintenant l'inconnue auxiliaire λ, définie par la formule

$$\lambda = \frac{q_3'}{p_3'}. \tag{100}$$

Il résulte de (99) que la fonction λ sera une fonction continue, vérifiant, à l'intérieur du domaine que l'on considère, l'inégalité

$$\lambda \neq 0. \tag{101}$$

Pour abréger l'écriture, posons

$$M_i = \frac{\partial M}{\partial \alpha_i}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{102}$$

Les deux premières équations du système (10) (p. 11) pourront alors s'écrire ainsi:

$$\left\{ \begin{aligned} 2(M_1 - q_1) + \lambda (M_3 + 2p_1) &= 0 \\ M_3 - 2q_2 + 2\lambda (M_2 + p_2) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{103}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 2(M_1 - q_1), & M_3 + 2p_1 \\ M_3 - 2q_2, & 2(M_2 + p_2) \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le 1-ièr membre de cette égalité, on reconnaît que, à cause de la 3-ième des équations (10) (p. 11), elle équivaut à la suivante

$$4M_1 M_2 - M_3^2 = 0, \tag{104}$$

laquelle, par conséquent, sera vérifiée dans tout le domaine considéré.

XV. Théorème. Lorsque les inégalités (94) et (99) sont vérifiées à l'intérieur d'un certain domaine (T), aucune des fonctions

$$(105)\qquad \begin{cases} M_1 - q_1, & M_3 + 2p_1 \\ M_3 - 2q_2, & M_2 + p_2 \end{cases}$$

ne peut se réduire à zéro dans tout l'intérieur du domaine considéré.

En effet, supposons que, contraîrement au théorème qu'il s'agit d'établir, l'une des fonctions

$$(106)\qquad M_1 - q_1 \quad \text{ou} \quad M_3 + 2p_1$$

soit identiquement nulle à l'intérieur du domaine (T). En vertu de (101) et (103) le seconde des fonctions considérées serait aussi identiquement nulle; nous aurions donc

$$(107)\qquad M_1 - q_1 = 0, \quad M_3 + 2p_1 = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_3} + 2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} = 0$$

dans tout le domaine considéré. Après avoir porté les valeurs (13) (p. 11) de p_1 et q_1 dans l'égalité précédente et après avoir substitué, dans l'équation obtenue, à M_1 et M_3, les expressions que l'on obtient en remplaçant, dans les valeurs de M_1 et M_3 tirées de (107), p_1 et q_1 par les valeurs que fournissent les formules (13) (p. 11), on trouvera finalement que l'on doit avoir identiquement

$$6w\alpha_2\alpha_3 - 6v_1\alpha_2^2 - 2v_2(2\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_2) = 0.$$

Donc, puisque w, v_1 et v_2 sont des constantes {XII, p. 27} on a

$$w = v_1 = v_2 = 0$$

et les formules (13) (p. 11) se réduisent aux formules (98). Celles-ci donnent en particulier

$$p_1 + q_2 = 0.$$

Par conséquent, il résulte de la 2-ième des équations (107) que

$$M_3 - 2q_2 = 0,$$

égalité qui, à cause de (103) et (101), entraîne le suivante:

$$(108)\qquad M_2 + p_2 = 0.$$

Après avoir porté les valeurs de M_1, M_3 et M_2 tirées des équations (107) et (108) dans l'égalité (104), on trouvera

$$p_1^2 + p_2 q_1 = 0,$$

égalité qui, en égard aux formules (98), entraîne la suivante:

$$M^2(\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0,$$

d'où

$$M = 0.$$

Donc, comme cela résulte des formules (98), on aurait

$$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$$

égalités qui, comme cela résulte de la formule (14), sont incompatibles avec l'inégalité (94). Il est donc prouvé qu'aucune des fonctions formant la 1-ière ligne du tableau (105) ne peut se réduire à zéro dans tout l'intérieur du domaine considéré. On démontrerait d'une façon analogue qu'aucune des fonctions formant la 2-ième ligne du tableau (105) ne peut se réduire à zéro dans le domaine considéré. Notre théorème doit donc être regardé comme démontré.

XVI. Remarque. Il résulte du théorème précédent qu'il n'existe aucun domaine à l'intérieur duquel on aurait à la fois l'inégalité (94) une égalité exprimant que l'une des fonctions (105) se réduit à zéro. Donc, à cause de la continuité des fonctions que nous avons à considérer, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer comme nous allons le faire dorénavant, que, dans le domaine considéré, aucune des fonctions (105) ne s'annule.

9. Actuellement nous nous proposons de tirer des équations (11) et (12) les expressions de p_3' et de q_3' en fonction de M: on verra que l'on peut y arriver sans connaître la forme de la fonction M.

Le système (11) donne:

$$(109) \qquad D\frac{\partial p_3'}{\partial \alpha_3} = 4(p_1^2 + p_2 q_1)\, p_2\, q_3' - 4p_2(p_1 + q_2)\, q_1\, p_3'$$

où D a la valeur (14). En portant dans l'expression de D la valeur de q_3' tirée de (100), on trouve:

$$(110) \qquad D = 4p_3'^2\{\lambda p_1 - q_1 + \lambda(\lambda p_2 - q_2)\}.$$

En tenant compte de cette expression de D et en substituant

à q'_3 dans le second membre de (109) sa valeur tirée de (100), on reconnaît que, en égard à (99), l'équation (100) équivaut à la suivante:

$$(111)\qquad \{\lambda p_1 - q_1 + \lambda(\lambda p_2 - q_2)\}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = \\ = 2p_2\{(\lambda p_1 - q_1)p_1 + (\lambda p_2 - q_2)q_1\}$$

D'autre part, les équations (103) équivalent aux suivantes:

$$(112)\qquad \begin{cases} 2(\lambda p_1 - q_1) = -(2M_1 + \lambda M_3), \\ 2(\lambda p_2 - q_2) = -(2\lambda M_2 + M_3). \end{cases}$$

En portant les valeurs de $\lambda p_1 - q_1$ et de $\lambda p_2 - q_2$ tirées de ces équations dans (111), on obtient une équation équivalente à la suivante

$$(113)\qquad 2\{M_1 + \lambda M_3 + \lambda^2 M_2\}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = \\ = 2p_2\{(2M_1 + \lambda M_3)p_1 + (2\lambda M_2 + M_3)q_1\}$$

où l'on a posé

$$(114)\qquad f = p_3'^2.$$

XVII. Lemme. L'une au moins des dérivées M_1 et M_2 de la fonction M est différente de zéro.

En effet, il résulte de (104) qu'au cas où chacune des fonctions M_1 et M_2 ne serait pas différente de zéro, la fonction M_3 serait nulle. Si donc chacune des fonctions M_1, M_2 était égale à zéro, ou aurait

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

et il résulterait des équations (112) et (110) que, contrairement à l'hypothèse, ou aurait

$$D = 0.$$

Notre lemme est donc démontré.

Cela posé, nous allons transformer l'équation (113) en envisageant successivement l'hypothèse où l'on aurait

$$(115)\qquad M_1 \neq 0$$

et celle où

$$(116)\qquad M_2 \neq 0.$$

Multiplions l'équation (113) par $2M_1$ et éliminons de l'équation obtenue la quantité M_2 au moyen de (104); il viendra

$$(117)\quad (2M_1+\lambda M_3)^2\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=2p_2(2M_1+\lambda M_3)(2M_1p_1+M_3q_1),$$

équation qui, à cause de (115), équivaut à (113). Mais

$$(118)\qquad 2M_1+\lambda M_3 \neq 0,$$

puisque la fonction

$$(2M_1+\lambda M_3)^2=4M_1(M_1+\lambda M_3+\lambda^2 M_2)$$

est égale, comme cela résulte de (112) et (110), à $2D$ et que, par hypothèse on a l'inégalité (94). Cela étant, l'équation (117) équivaut à

$$(119)\qquad (2M_1+\lambda M_3)\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=2p_2(2M_1p_1+M_3q_1),$$

laquelle {XVI, p. 31} équivaut à celle que l'on obtient en la multipliant par

$$M_3+2p_1,$$

en substituant dans cette dernière à l'expression

$$\lambda(M_3+2p_1)$$

l'expression $2(M_1-q_1)$ qui lui est égale à cause de la 1-ière des équations (103), il vient

$$(120)\quad 2(2M_1p_1+M_3q_1)\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=2p_2(2M_1p_1+M_3q_1)(M_3+2p_1).$$

Mais il résulte de (118) et de ce que (120) a été déduite de (119) en multipliant celle ci par un facteur non nul, que

$$2M_1p_1+M_3q_1\neq 0$$

donc, l'équation (120) donne

$$(121)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=p_2(M_3+2p_1).$$

Si nous avions supposé que l'on a l'inégalité (116) il aurait suffit de multiplier (113) par $2M_2$ pour s'assurer, au moyen d'un calcul tout à fait analogue à celui que nous venons de développer,

que, dans ce cas encore la formule (121) subsiste. Donc {XVII p. 32} la formule (121) subsiste dans tous les cas.

En introduisant la fonction f, définie par la formule (67) (p. 22), on donnera aux deux premières équations du système (11) (p. 11) la forme suivante:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} &= p_1^2 + p_2 q_1 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} &= p_2(p_1 + q_2). \end{aligned}\right.$$

Ces équations donneront, après y avoir porté la valeur (121) de $\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}$,

$$(122) \qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= p_2(2q_1 - \lambda M_3) + 2p_1(p_1 - \lambda p_2), \\ 2\lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= p_2(2q_2 - M_3). \end{aligned}\right.$$

D'autre part les équations (103) (p. 29) donnent:

$$\begin{aligned} 2q_1 - \lambda M_3 &= 2(M_1 + \lambda p_1), \\ 2q_2 - M_3 &= 2\lambda(M_2 + p_2). \end{aligned}$$

En portant les valeurs précédentes de $2q_1 - \lambda M_3$ et de $2q_2 - M_3$ dans les formules (122) on trouve:

$$(123) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= p_2 M_1 + p_1^2, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= p_2(M_2 + p_2). \end{aligned}\right.$$

Après avoir porté dans les équations (121) et (122) les valeurs de p_1 et p_2 tirées des formules (13) (p. 11) on s'assurera aisément que, indépendamment de la forme que pourrait avoir la fonction M, l'ensemble des équations (121) et (123) constitue un système complètement intégrable qui fournit pour la fonction f, ou ce qui, à cause de la formule (67) (p. 22), revient au même, pour la fonction $p_3'^2$ l'expression suivante:

$$(124) \qquad p_3'^2 = c_1 - \frac{\alpha_1(M-w)^2 + 4\alpha_3 v_1(M-w) + 4\alpha_2 v_1^2}{4\Delta},$$

où c_1 représente une constante arbitraire.

On s'assurera aisément que, pour calculer $q_3'^2$, il suffit de substituer, dans les considérations qui nous ont conduit à la formule (124), aux quantités

$$p_1,\ p_2,\ p_3',\ q_1,\ q_2,\ q_3',\ M,\ w,\ v_1,\ v_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,$$

respectivement les quantités

$$q_2,\ q_1,\ -q_3',\ p_2,\ p_1,\ -p_3',\ -M,\ w,\ v_2,\ v_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3.$$

On trouvera de cette façon

$$(125)\qquad q_3'^2 = c_2 - \frac{\alpha_2 (M+w)^2 - 4\alpha_3 v_2 (M+w) + 4\alpha_1 v_2^2}{4\Delta},$$

en désignant par c_2 une nouvelle constante arbitraire.

10. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la fonction M par la condition qu'elle satisfasse aux trois équations qui forment le système (10) (p. 11) ou, ce qui revient au même, par la condition qu'elle vérifie le système formé par les deux équations (103) et la 3-ième des équations (10), c'est-à dire le système suivant:

$$(126)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2M_1 + \lambda M_3 - 2(q_1 - \lambda p_1) &= 0, \\ M_3 + 2\lambda M_2 - 2(q_2 - \lambda p_2) &= 0, \\ h_3(M) + 2(q_1 p_2 - q_2 p_1) &= 0, \end{aligned} \right.$$

où λ est définie par la formule (100) (p. 29), les symboles M_1, M_2, M_3 étant définis par les formules (102) (p. 29). En utilisant les formules (13), (124) et (125) on transformerait aisément le système (126) en un autre qui ne contiendrait plus que la seule inconnue M. Toutefois, pour arriver à des équations maniables, il faut procéder avec quelque attention.

Je rappelle d'abord que le système (126) entraîne, comme nous avons déjà eu l'occasion de le constater, l'équation (104) (p. 29). Pour aller plus loin, observons qu'en tenant compte de cette équation on déduit aisément des deux premières équations du système (126) les deux suivantes

$$2(q_1 - \lambda p_1) M_2 - (q_2 - \lambda p_2) M_3 = 0,$$
$$2(q_2 - \lambda p_2) M_1 - (q_1 - \lambda p_1) M_3 = 0$$

Multiplions la première de ces équations par $q_1 + \lambda p_1$ et la deuxième par $q_2 + \lambda p_2$; en ajoutant membre à membre les

équations obtenues, on obtiendra une équation équivalente à la suivante:

$$(127)\quad (q_1^2-\lambda^2p_1^2)M_2+(q_2^2-\lambda^2p_2^2)M_1-(q_1q_2-\lambda^2p_1p_2)M_3=0,$$

où comme cela résulte des égalités (100), (124) et (125), λ^2 doit être regardé comme défini par la formule

$$(128)\quad \lambda^2=\frac{4c_2\Delta-\alpha_2(M+w)^2+4\alpha_3v_2(M+w)-4\alpha_1v_2^2}{4c_1\Delta-\alpha_1(M-w)^2-4\alpha_3v_1(M-w)-4\alpha_2v_1^2}.$$

Il résulte de ce qui précède ainsi que du lemme XVII (p. 32) que nous avons le théorème suivant:

XVIII. Théorème. Les valeurs des constantes {XII, p. 27} v_1, v_2 et w étant choisies ainsi que celles des constantes c_1 et c_2 qui figurent dans les formules (124) et (125), la fonction M doit nécessairement satisfaire à l'équation (104), à la dernière des équations (126) ainsi qu'à l'équation (127), sans se reduire à une constante.

Voici maintenant un théorème qui complète le précédent:

XIX. Théorème. Lorsque, sans se réduire à une constante, la fonction M satisfait, dans les conditions énoncées dans le théorème précédent, à l'ensemble des équations (104), (126) et (127), les formules (124) et (125) lui font correspondre précisément deux solutions de l'ensemble des équations (9), (10) (11) et (12); pour aucune de ces solutions le déterminant D {formule (14) p. 11} n'est identiquement nul et ces solutions se déduisent l'une de l'autre en substituant aux expressions de p_3' et de q_3' qui conviennent à l'une des solutions considérées, les produits de ces expressions par le nombre

$$-1.$$

Pour établir ce théorème supposons que l'hypothèse en soit vérifiée.

Si chacune des dérivées M_1, M_2 et M_3 ne jouissait pas de la propriété de ne pas se réduire identiquement à zéro, il existerait, comme cela résulte de (104), un domaine (T) à l'intérieur duquel l'une des dérivées M_1 ou M_2 serait différente de zéro, la deuxième d'entre elles ainsi que la dérivée M_3 étant identiquement nulle. Considérons par exemple le cas où l'on aurait à l'intérieur du domaine (T)

$$(129)\qquad M_1\neq 0,\quad M_2=M_3=0,$$

l'équation (127) nous donnera

$$q_2^2 - \lambda^2 p_2^2 = 0$$

ou bien

$$(q_2 - \lambda p_2)(q_2 + \lambda p_2) = 0$$

où λ représente l'une des deux racines de (128). Il existera donc une racine λ' de (128) telle que l'on ait

(130) $$q_2 - \lambda' p_2 = 0.$$

Or p_2 et q_2 ne peuvent pas être nuls identiquement car, comme en vertu des formules (13) (p. 11) on a

(131) $$4\Delta(q_1 p_2 - q_2 p_1) = - M^2 + w^2 - 4 v_1 v_2,$$

on aurait si l'on avait identiquement

$$p_2 = q_2 = 0,$$
$$- M^2 + w^2 - 4 v_1 v_2 = 0,$$

et la fonction M, contrairement à l'hypothèse, se réduirait à une constante.

Il résulte de là que l'équation (130) déterminera λ' sans ambiguité si, comme nous le ferons, on impose à λ' la condition d'être continue. La fonction λ' étant déterminée de cette façon, nous allons faire voir que, pour obtenir une solution du problème il n'y à qu'à associer à M les systèmes de déterminations de p_3' et q_3' qui satisfont à la condition

(132) $$\frac{q_3'}{p_3'} = \lambda'.$$

A cet effet il nous faut prouver:

1⁰ que pour satisfaire au système (126) avec $\lambda = \frac{q_3'}{p_3'}$ il faut et il suffit que l'on prenne un système de déterminations de p_3' et q_3' qui satisfasse à la condition (132).

2⁰ que le déterminant D défini par la formule (14) (p. 11) n'est pas identiquement nul. Or il résulte de (129) et de (130) que l'on a

(133) $$M_3 + 2\lambda' M_2 - 2(q_2 - \lambda' p_2) = 0.$$

D'autre part, puisque, par hypothèse, la 3-ième équation du système (126) est vérifiée, ou aura {voir les formules (8), p. 10} à cause de (129):

$$- 2 p_2 M_1 + 2(q_1 p_2 - q_2 p_1) = 0$$

d'où, moyennant (130):

$$2M_1 - 2(q_1 - \lambda' p_1) = 0$$

ou,, puisque $M_3 = 0$,

$$2M_1 + \lambda' M_3 - 2(q_1 - \lambda' p_1) = 0. \tag{134}$$

La fonction M satisfait donc aux équations (133) et (134) ainsi que (par hypothèse) à la 3-ième des équations (126). Pour que ce système soit équivalent au système (126) $\left\{\text{où } \lambda = \frac{q_3'}{p_3'}\right\}$ il est évidemment nécessaire et suffisant que la relation (132) soit satisfaite.

Reste à prouver que le déterminant D n'est pas identiquement nul. Or il résulte de (131) (où, rappelons-le, w, v_1 et v_2 représentent des constantes) que, puisque la fonction M ne se réduit pas à une constante, l'expression

$$q_1 p_2 - q_2 p_1$$

n'est pas nulle identiquement, donc (V, p. 12) le déterminant D n'est pas identiquement nul.

En définitive, dans le cas particulier où l'on a les relations (129), le théorème est démontré. On l'établirait d'une façon analogue dans le cas où l'on aurait

$$M_2 \neq 0, \quad M_1 = M_3 = 0.$$

Il ne reste donc plus qu'à examiner le cas général où

$$M_1 . M_2 . M_3 \neq 0. \tag{135}$$

Désignons par λ' une détermination continue de λ vérifiant l'équation (128), en nous réservant de préciser plus tard quelle est celle des deux déterminations de λ que représente le symbole λ'. L'équation (127) pourra s'écrire ainsi:

$$(q_1^2 - \lambda'^2 p_1^2) M_2 + (q_2^2 - \lambda'^2 p_2^2) M_1 - (q_1 q_2 - \lambda'^2 p_1 p_2) M_3 = 0. \tag{136}$$

D'ailleurs

$$(q_1 q_2 - \lambda' p_1 p_2)^2 - 4(q_1^2 - \lambda'^2 p_1)(q_2^2 - \lambda'^2 p_2) =$$
$$= \{(q_1 - \lambda' p_1)(q_2 + \lambda' p_2) - (q_1 + \lambda' p_1)(q_2 - \lambda' p_2)\}^2 =$$
$$= 4(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 \lambda'^2.$$

Or l'expression

$$q_1 p_2 - q_2 p_1$$

ne peut s'évanouir à l'intérieur d'aucun domaine car, à cause de la relation (131) la fonction M, contrairement à l'hypothèse, se réduirait à une constante. Par conséquent les fonctions

$$q_1^2 - \lambda'^2 p_1^2, \quad q_2^2 - \lambda'^2 p_2^2 \quad \text{et} \quad q_1 q_2 - \lambda'^2 p_1 p_2$$

ne peuvent pas être nulles à la fois.

Cela posé, les équations (136) et (104) permettront de calculer les rapports des quantités M_1, M_2 et M_3. On constate qu'il existe un nombre ε, vérifiant l'égalité

$$\varepsilon^2 = 1$$

et tel que les dérivées M_i $(i = 1, 2, 3)$ soient proportionnelles aux expressions

$$(q_1 - \varepsilon\lambda' p_1)^2, \quad (q_2 - \varepsilon\lambda' p_2)^2, \quad 2(q_1 - \varepsilon\lambda' p_1)(q_2 - \varepsilon\lambda' p_2).$$

Mais si λ' est une racine de (128), $\varepsilon\lambda'$ en est évidemment aussi une.

Par conséquent, nous pouvons préciser la détermination de λ que représentera le symbole λ' en spécifiant que c'est celle à laquelle correspond la valeur $+1$ de ε. La détermination λ' de λ étant précisée de la façon précédente, les quantités M_1, M_2 et M_4 seront proportionnelles aux expressions

$$(q_1 - \lambda' p_1)^2, \quad (q_2 - \lambda' p_2)^2, \quad 2(q_1 - \lambda' p_1)(q_2 - \lambda' p_2)$$

avec un coefficient de proportionalité que l'on déterminera en tenant compte de ce que, par hypothèse, la fonction M satisfait à la 3-ième des équations (126) (p. 35).

Après avoir effectué les calculs précédents on s'assurera que l'on à:

$$2M_1 + \lambda' M_3 - 2(q_1 - \lambda' p_1) = 0,$$
$$M_3 + 2\lambda' M_2 - 2(q_2 - \lambda' p_2) = 0.$$

Pour que ces équations se confondent avec celles que l'on obtient en substituant à λ dans les deux premières des équations (126) le rapport

$$\frac{q_3'}{p_3'}$$

il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on associe à la fonc-

tion M un système de valeurs de p'_3 et de q'_3, tiré des équations (124) et (125), tel que l'on ait

$$\frac{q'_3}{p'_3} = \lambda'.$$

Cette condition étant remplie, toutes les équations (9), (10), (11) et (12) seront satisfaites et il ne reste plus qu'à prouver que le déterminant (D) {formule (14), p. 11} n'est pas nul identiquement. Or, puisque, par hypothèse, la fonction M ne se réduit pas à une constante, il résulte de la relation (131) (p. 37) que l'expression

$$q_1 p_2 - q_2 p_1$$

n'est pas identiquement nulle. Par conséquent {V, p. 12} le déterminant D n'est non plus identiquement nul et la démonstration du théorème est achevée.

11. Il résulte des théorèmes XVIII et XIX (p. 36) que le problème étudié se ramène à la détermination de l'intégrale commune des équations (104), (127) et de la dernière des équations (126). Si, après avoir porté dans l'équation (127) la valeur (128) de λ^2, on substitue dans l'équation obtenue ainsi que dans la dernière des équations (126) les valeurs de p_1, p_2, q_1 et q_2 tirées des égalités (13) (p. 11), si en outre, pour déterminer la fonction M des variables α_1, α_2, α_3, on se propose de rechercher une fonction $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, M)$ des quatre variables α_1, α_2, α_3 et M, telle que l'équation

$$(137) \qquad F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, M) = 0$$

fasse connaître la fonction cherchée M, on constate que après avoir posé pour abréger l'écriture:

$$(138) \qquad F_0 = \frac{\partial F}{\partial M}, \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial M_i}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$(139) \qquad \begin{cases} l = M^2 - w^2 + 4uv, & l' = M^2 - w^2 - 4uv, \\ a_1 = 2v_1(w + M) \quad , & a_2 = 2v_2(w - M) \end{cases}$$

on peut écrire les équations du problème comme il suit:

$$(140) \qquad 4F_1 . F_2 - F_3^2 = 0,$$

$$(141)\quad l\{(2a_1\alpha_3+l'\alpha_1)F_1-(2a_3\alpha_3+l'\alpha_2)F_2+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)F_3\}+$$
$$+4c_1\{[(M+w)\alpha_3-2v_2\alpha_1]^2F_1+[(M+w)\alpha_2-2v_3\alpha_3]^2F_2+$$
$$+[(M+w)\alpha_3-2v_2\alpha_1]\,[(M+w)\alpha_2-2v_2\alpha_3]F_3\}+$$
$$-4c_2\{[(M-w)\alpha_1+2v_1\alpha_3]^2F_1+[(M-w)\alpha_3+2v_1\alpha_2]^2F_2+$$
$$+[(M-w)\alpha_1+2v_1\alpha_3]\,[(M-w)\alpha_3+2v_1\alpha_2]F_3\}=0.$$

$$(142)\quad 2\{(M-w)\alpha_1+2v_1\alpha_3\}F_1+2\{(M+w)\alpha_2-2v_2\alpha_3\}F_2+$$
$$+2\{M\alpha_3+v_1\alpha_2-v_2\alpha_1\}F_3-lF_0=0,$$

où, bien entendu, les variables α_1, α_2, α_3 et M doivent être regardées comme des variables indépendantes.

Introduisons maintenant au lieu des variables α_1, α_2, α_3 les variables σ_1, σ_2, σ_3, définies par des formules de la forme

$$\sigma_i=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\,\alpha_k \qquad (i=1,2,3)$$

où les a_{ik} sont des fonctions de la seule variable M, fonctions telles que l'expression qui est multipliée par l dans l'équation (141), c'est-à-dire l'expression

$$(2a_1\alpha_3+l'\alpha_1)F_1-(2a_2\alpha_3+l'\alpha_2)F_2+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)F_3$$

prenne la forme suivante

$$\varrho_1\,\sigma_1\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\varrho_2\,\sigma_2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\varrho_3\,\sigma_3\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}$$

où les ϱ_k représentent des fonctions de la seule variable M. On trouve aisément que l'on peut prendre:

$$(143)\quad\left\{\begin{aligned}\sigma_1&=(M-w)^2\alpha_1+4v_1^2\alpha_2+4v_1(M-w)\alpha_3\\ \sigma_2&=4v_2^2\alpha_1+(M+w)^2\alpha_2-4v_2(M+w)\alpha_3,\\ \sigma_3&=-2v_2(M-w)\alpha_1+2v_1(M+w)\alpha_2+l'\alpha_3.\end{aligned}\right.$$

A la suite de ce changement de variables les équations (141) et (142) prennent la forme suivante

$$l^2\left\{\sigma_1\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}-\sigma_2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}\right\}+$$
$$+4c_1\left\{\sigma_3^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\sigma_2^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\sigma_3\,\sigma_2\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}\right\}+$$
$$-4c_2\left\{\sigma_1^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\sigma_3^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\sigma_3\,\sigma_1\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}\right\}=0,$$

$$l\frac{\partial F}{\partial M} + 4M\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} = 0.$$

Effectuons maintenant, dans ces équations, le changement de variables suivant:

(144) $$s_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad s_3 = \frac{\sigma_1\, o_2}{\sigma_3} - \sigma_3,$$

il viendra:

(145) $$l^2\left\{s_1\frac{\partial F}{\partial s_1} - s_2\frac{\partial F}{\partial s_2}\right\} - 4s_3\left\{c_1\frac{\partial F}{\partial s_1} - c_2\frac{\partial F}{\partial s_1}\right\} = 0,$$

(146) $$l\frac{\partial F}{\partial M} + 4Ms_3\frac{\partial F}{\partial s_3} = 0.$$

En se reportant à la première des formules (139), on reconnaît de suite que, après avoir posé

(148) $$\varphi = \frac{s_3}{(M^2 - w^2 + 4uv)^2},$$

ou peut représenter l'intégrale générale de l'équation (146) au moyen de la formule suivante

$$F = F_1(\varphi, s_1, s_2)$$

où $F_1(\varphi, s_1, s_2)$ représente une fonction arbitraire des variables φ, s_1 et s_2, assujettie seulement à remplir des conditions de régularité évidentes. En exprimant que l'expression précédente de la fonction F satisfait à l'équation (145) et après avoir posé

(148) $$\psi = s_1\, s_2 - 4(c_1\, s_2 + c_2\, s_1)\varphi,$$

on trouve que la solution commune la plus générale des équations (145) et (146) peut être representée par la formule suivante:

(149) $$F = F_2(\varphi, \psi)$$

où le second membre représente une fonction arbitraire de φ et de ψ.

Reste à exprimer que l'expression (149) de F satisfait à l'équation (140); moyennant un calcul tout à fait élémentaire mais un peu long, on reconnaît que la condition nécessaire et suffisante pour que la valeur (149) de F satisfasse à l'équation (140) est

que la fonction $F_2(\varphi, \psi)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$(150)\qquad \left\{4\psi^2 - 4(\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2)\right\}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \psi}\right)^2 + \\ + 4\varphi\psi \frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\frac{\partial F_2}{\partial \psi} + \varphi^2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right)^2 = 0$$

Mais en réalité ce que nous cherchons c'est la relation entre M, α_1, α_2, α_3, que définit l'équation (137) ou, ce qui, à cause de la formule (149), revient au même, la chose qu'il nous importe de connaître c'est la relation entre φ et ψ que définit l'équation

$$F_2(\varphi, \psi) = 0.$$

Or, il résulte de (150) que la relation en question se confond avec celle qui définit l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\{4\psi^2 - 4(\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2)\}\, d\varphi^2 - 4\varphi\,\psi\, d\varphi\, d\psi + \varphi^2\, d\psi^2 = 0,$$

laquelle peut encore s'écrire ainsi:

$$(2\psi\, d\varphi - \varphi d\psi)^2 - 4(\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2)\, d\varphi^2 = 0,$$

d'où

$$(151)\qquad \psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2 = (c_3 \varphi - 1)^2$$

où c_3 représente une constante arbitraire.

Moyennant les formules (143), (144), (147) et (148) on exprimera les fonctions φ et ψ au moyen de M et d'élements connus et l'équation (151) fera connaître alors la fonction M qu'il s'agissait de déterminer.

En se reportant aux théorèmes XVIII et XIX (p. 36) et en remarquant que la fonction M, déterminée au moyen de l'équation (151), ne se réduit pas à une constante, on reconnaît que l'on a le théorème suivant.

XX. Théorème. Il existe une solution de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) (p. 11) n'annulant pas identiquement le déterminant D défini par la formule (14): cette solution dépend de six constantes arbitraires dont trois représentant les valeurs constantes (XII, p. 27) des fonctions v_1, v_2 et w, les trois autres étant les constantes c_1, c_2 et c_3 entrant dans les équations (124), (125) et (151); le choix des six constantes précédentes étant arrêté, on pourra procéder comme il suit pour former la solution corres-

pondante du problème: on choisira arbitrairement une détetermination M vérifiant l'équation (151), ou portera cette détermination de M dans les équations (124) et (125) et après avoir choisi arbitrairement l'une des deux déterminations de l'une des fonctions p_3' et q_3', on lui associera (ce qui sera toujours possible) celle des déterminations de la seconde de ces fonctions qu'il faudra choisir pour que la valeur

$$\lambda = \frac{q_3'}{p_3'}$$

de λ satisfasse aux équations obtenues en portant la détermination considérée de M dans les deux premières équations du système (126), après avoir préalablement substitué dans ces équations aux fonctions p_1, p_2, q_1 et q_2 leurs valeurs tirées des équations (13) (p. 11).

12. Ayant déterminé toutes les intégrales du système formé par l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12), appliquons les résultats obtenus au problème de physique qui nous a conduit aux équations précédentes.

En se reportant aux formules (1) (p. 9) on reconnaît que les fonctions

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \tag{152}$$

qui entrent dans les formules (3) (p. 10), doivent être déterminées dans le domaine que définit l'ensemble des relations suivantes

$$\alpha_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \geqq 0. \tag{153}$$

Il faut évidemment chercher des expressions des fonctions (152) telles que chacune des fonctions (152) soit continue dans tout le domaine (153).

Dans les numéros précédents nous avons reconnu que, au point de vue de la forme analytique, il y a lieu de distinguer huit solutions différentes de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12); l'une d'elles est caractérisée par la condition que la valeur correspondante du déterminant D, défini par la formule (14) (p. 11) ne se réduise pas identiquement à zéro; c'est celle à laquelle se rapporte le théorème XX (p. 43); en dehors de cette solution il y en a encore sept autres ayant cela de commun qu'il correspond à chacune d'elles une valeur identiquement nulle du déterminant D, pour deux de ces solutions (voir le No. 5) le produit $p_3' . q_3'$ n'est

pas identiquement nul; l'une de ces solutions est donnée par les formules suivantes

$$(154)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta p_1 &= -\frac{v_2}{C}\ \alpha_3 + v_1\alpha_2, \\ \Delta p_2 &= \frac{v_2}{C}\ \alpha_1 - v_1\alpha_3, \\ \Delta q_1 &= v_1 C\alpha_1 - v_2\alpha_3, \\ \Delta q_2 &= -v_1 C\alpha_3 + v_2\alpha_1, \\ p_3'^2 &= \frac{2Cv_1v_2\alpha_3 - C^2v_1^2\alpha_2 - v_2^2\alpha_1}{C^2\Delta} + F, \\ q_3' &= Cp_3', \end{aligned}\right.$$

où C est une constante arbitraire non nulle, les quantités v_1, v_2 et F étant des fonctions arbitraires de la fonction

$$(155)\qquad \alpha_1 C^2 - 2\alpha_3 C + \alpha_2;$$

la deuxième des solutions considérées est donnée par les formules suivantes

$$(156)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta p_1 &= -\ \frac{v_2}{\lambda}\alpha_3 + v_1\alpha_2 \\ \Delta p_2 &= \frac{v_2}{\lambda}\alpha_1 - v_1\alpha_3 \\ \Delta q_1 &= v_1\lambda\alpha_3 - v_2\alpha_3 \\ \Delta q_2 &= -v_1\lambda\alpha_3 + v_2\alpha_1 \\ p_3'^2 &= \frac{2\lambda v_1v_2\alpha_3 - v_2^2\alpha_1 - v_1^2\alpha_2}{\lambda^2\Delta} + F, \end{aligned}\right.$$

où v_1, v_2 et F sont des fonctions arbitraires de la fonction λ laquelle est définie par l'équation

$$(157)\qquad \alpha_1\lambda^2 - 2\alpha_3\lambda + \alpha_2 + \theta(\lambda) = 0$$

dans laquelle $\theta(\lambda)$ représente une fonction arbitraire de λ; viennent maintenant les deux solutions (voir le No. 6, p. 21) où l'une des fonctions p_3' et q_3' et une seule est identiquement nulle; l'une des solutions précédentes est donnée par les formules:

$$(158)\quad \left\{\begin{aligned} 2\Delta p_1 &= \psi(\alpha_2)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\alpha_2 \\ 2\Delta p_2 &= -\ \psi(\alpha_2)\alpha_1 - 2\varphi(\alpha_2)\alpha_3 \\ p_3'^2 &= -\frac{\{\psi(\alpha_2)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\alpha_2\}^2}{4\alpha_2\Delta} + F(\alpha_2) \\ q_1 &= q_2 = q_3' = 0, \end{aligned}\right.$$

où $\varphi(\alpha_2)$, $\psi(\alpha_2)$ et $F(\alpha_2)$ représentent des fonctions arbitraires de α_2; la deuxième des deux solutions considérées est la suivante:

$$(159)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= p_2 = p_3' = 0, \\ 2\Delta q_1 &= -\ \psi(\alpha_1)\alpha_2 - 2\varphi(\alpha_1)\alpha_3 \\ 2\Delta q_2 &= \quad \psi(\alpha_1)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\alpha_2 \\ q_3'^2 &= -\frac{\{\psi(\alpha_1)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\alpha_2\}^2}{4\alpha_1\Delta} + F(\alpha_1) \end{aligned}\right.$$

où $\varphi(\alpha_1)$, $\psi(\alpha_1)$ et $F(\alpha_1)$ représentant des fonctions arbitraires de α_1; enfin, en dehors du cas dénué d'intérêt où toutes les fonctions p_1, p_2, p_3', q_1, q_2, q_3' sont identiquement nulles, nous avons encore (voir le No. 7) trois solutions où l'on a identiquement

$$(160)\qquad p_3' = q_3' = 0;$$

l'une de ces solutions est définie par les formules:

$$(161)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= q_2 = q_1 = 0, \\ p_2 &= \text{une fonction arbitraire de } \alpha_2 \text{ et } \alpha_3; \end{aligned}\right.$$

une seconde solution est la suivante:

$$(162)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= q_2 = p_2 = 0 \\ q_1 &= \text{une fonction arbitraire de } \alpha_1 \text{ et } \alpha_3; \end{aligned}\right.$$

voici enfin les formules qui font connaître la 3-ième solution du genre considéré; le symbole λ désignant une fonction définie par l'équation

$$(163)\qquad F(\alpha_1 + \alpha_3,\ \ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \ \lambda) = 0$$

où $F(\alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda)$ représente une fonction arbitraire des expressions

$$(164)\qquad \alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \ \lambda,$$

on a

$$(165)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \Phi(\alpha_1 + \lambda\alpha_2,\ \ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \ \lambda) \\ p_2 &= \lambda p_1 \\ q_1 &= -\frac{p_1}{\lambda} \\ q_2 &= -p_1 \end{aligned}\right.$$

où $\Phi(\alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda)$ représente une fonction arbitraire des expressions (164)

On pourrait se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir

des expressions admissibles pour les inconnues (152) (p. 44) sans supposer qu'elle dussent être définies dans toute l'étendue du domaine (153) (p. 44) par une *seule* des huit solutions différentes de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) (p. 11); dans ce cas le domaine (153) (p. 44) se décomposerait en plusieurs régions de telle sorte que dans des régions différentes nos inconnues seront définies par des solutions différentes des équations (9), (10), (11) et (12). Toutefois, pour éviter de nous engager dans des considérations compliquées et probablement inutiles, nous nous bornerons à considérer successivement chacune des huit solutions de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) en étudiant pour chacune d'elles la question suivante: la solution considérée peut-elle, peut-être moyennant une particularisation convenable des éléments arbitraires qu'elle contient, fournir des expressions admissibles des fonctions (152) et valables dans tout le domaine (153)?

XXI. Théorème. La 1-ière des huit solutions énumérées plus haut, celle à laquelle se rapporte le théorème XX (p. 43) doit être rejettée comme impropre à fournir des expressions admissibles des inconnues (152), valables dans tout le domaine (153).

En effet, chacune des fonctions v_1, v_2 et w se réduisant {XII p. 27} à une constante, il résulte de la continuité des fonctions (152) et des formules (6) (p. 10) que la solution considérée ne pourrait être admissible qu'à la condition d'avoir

(166) $$v_1 = v_2 = w = 0.$$

Or, dans ce cas, ainsi que cela résulte des formules (143), (144), (147) et (148), l'équation (151) pourrait s'écrire ainsi:

(167) $$M^4 + 2[c_3\alpha_3 - 2(c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1)]M^2 + 16c_1c_2\Delta = c_3^2\Delta$$

et, à cause de (166), les formules (124) et (125) se réduiraient aux suivantes:

(168) $$\begin{cases} p_3'^2 = c_1 - \dfrac{\alpha_1 M^2}{\Delta}, \\ q_3'^2 = c_2 - \dfrac{\alpha_2 M^2}{\Delta}. \end{cases}$$

J'observe maintenant que {formules (6) (p. 10} l'on a

(169) $$p_3'^2 = p_3^2\Delta, \quad q_3' = q_3^2\Delta.$$

Donc, puisque les fonctions p_3 et q_3 sont continues, il résulterait de (168) que l'on a:

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{c_1 - \frac{\alpha_1 M^2}{\Delta}\right\} = 0$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{c_2 - \frac{\alpha_2 M^2}{\Delta}\right\} = 0.$$

Ces égalités étant incompatibles, on voit que la solution considérée ne peut par fournir des expressions admissibles de nos inconnues.

XXII. Théorème. Aucun des systèmes de formules (154), (156), (158) et (159) ne fournit pour les inconnues (152) des valeurs admissibles ne se réduisant pas aux suivantes:

(170) $$p_i = q_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La marche à suivre étant en principe la même dans chacun des quatre cas qu'il y a à considérer, nous nous bornerons à discuter les formules (154).

Envisageons les systèmes de valeurs des variables α_1, α_2 et α_3 tels que l'on puisse poser

(171) $$\alpha_2 = t^2\alpha_1, \quad \alpha_3 = t\alpha_1$$

et n'envisageons que les systèmes de valeurs de α_1 et t pour lesquels l'expression (155) conserve une valeur constante ζ_0. Nous aurons

(172) $$\alpha_1 C^2 - 2\alpha_1 Ct + \alpha_1 t^2 = \zeta_0.$$

D'autre part, puisque, dans les formules (154), les fonctions v_1 et v_2 sont des fonctions de la seule fonction (155), ces fonctions coserveront des valeurs constantes $v_1^{(0)}$ et $v_2^{(0)}$ pour tous les systèmes de valeurs de α_1 et t qui vérifient (172). Portons les valeurs (171) de α_2 et de α_3 dans la 1 ière des équations (154) en supposant que (171) soit satisfaite. Comme on a

$$\Delta = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2,$$

il viendra

$$0 = \left\{-\frac{v_2^{(0)}}{C}\,t + v_1^{(0)}t^2\right\}\alpha_1,$$

pourvu que (171) soit satisfaite. Nous aurons donc

$$v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = 0.$$

Mais la constaté ζ_0 a une valeur arbitraire. On a donc identiquement

$$v_1 = v_2 = 0.$$

En s'adressant à la 5-ième des formules (154) et en tenant compte de la 1-ière des relations (169), on prouvera aisément que la fonction F, fonction de la seule fonction (155), se réduit identiquement à zéro. Donc, les seules valeurs admissibles pour nos inconnues que peuvent fournir les formules (154) sont bien celles que définissent les équations.

Le raisonnement étant, comme nous l'avons déjà fait remarquer, tout à fait semblable dans chacun des trois cas qu'il y aurait encore à considérer, notre théorème doit être regardé comme établi.

Les deux théorèmes précédents nous amènent à la conclusion suivante: *on a dans tous les cas relations* (160) *ou* (formules (6), p. 10), *ce qui revient au même:*

$$p_3 = q_3 = 0;$$

quant aux autres inconnues p_1, p_2, q_1 et q_2, *on ne peut hésiter qu'entre les expressions* (161), (162) *ou* (165) *de ces inconnues.*

Les ensembles boreliens abstraits

Par

W. Sierpiński.

$\mathcal{F}$ étant une famille donnée d'ensembles (dont les éléments sont de nature absolument quelconque), nous désignerons par $B(\mathcal{F})$ la plus petite famille $\mathcal{H}$ d'ensembles qui satisfait aux troix conditions suivantes:

1°. $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$

2°. Si $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, où $E_n \varepsilon \mathcal{H}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a $E \varepsilon \mathcal{H}$.

3°. Si $E = E_1 E_2 E_3 \ldots$, où $E_n \varepsilon \mathcal{H}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a $E \varepsilon \mathcal{H}$.

($B(\mathcal{F})$ est donc la famille de tous les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles de la famille $\mathcal{F}$ et en effectuant (dans un ordre quelconque) un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions et de multiplications. M. Hausdorff désigne la famille $B(\mathcal{F})$ par $\mathcal{F}_{(\sigma\delta)}$ et appelle les ensembles formant $\mathcal{F}_{(\sigma\delta)}$ *ensembles boreliens* obtenus des ensembles $E \varepsilon \mathcal{F}$ [1])).

Désignons par $B^*(\mathcal{F})$ la plus petite famille $\mathcal{H}$ d'ensembles qui satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° et à la condition

4°. Si $E_1 \varepsilon \mathcal{H}$ et $E_2 \varepsilon \mathcal{H}$, on a $E_1 - E_2 \varepsilon \mathcal{H}$.

(La propriété 3° est d'ailleurs, d'après la formule

$$E_1 E_2 E_3 \ldots = E_1 - [(E_1 - E_2) + (E_1 - E_3) + (E_1 - E_4) + \ldots],$$

une conséquence des propriétés 2° et 4°).

On a évidemment (pour toute famille $\mathcal{F}$ d'ensembles) la formule

$$B(\mathcal{F}) \subset B^*(\mathcal{F}),$$

et $B^*(\mathcal{F})$ peut être regardée comme la plus petite famille $\mathcal{H}$ d'ensembles contenant $B(\mathcal{F})$ et satisfaisant à la condition 4°.

---

[1]). F Hausdorff: *Mengenlehre,* Berlin und Leipzig 1927, p. 84.

Le but de cette Note est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $B(\mathcal{F}) = B^*(\mathcal{F})$. Nous prouverons notamment ce

Théorème. *Pour qu'on ait pour une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles la formule*

(1) $$B(\mathcal{F}) = B^*(\mathcal{F}),$$

il faut et il suffit que la famille $\mathcal{F}$ satisfasse à la condition:

(2) *Si $E_1 \varepsilon \mathcal{F}$ et $E_2 \varepsilon \mathcal{F}$, on a $E_1 - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$.*

Démonstration. La famille $\mathcal{H} = B^*(\mathcal{F})$ satisfaisant aux conditions 1° et 4°, on reconnait sans peine que la formule (1) entraîne (2). La condition de notre théorème est donc nécessaire. Il reste donc à démontrer qu'elle est suffisante,

Soit donc $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles satisfaisant à la condition (2): il suffira évidemment de prouver que la famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$ satisfait à la condition 4°

Nous prouverons d'abord que:

(3) *Si $E_1 \varepsilon \mathcal{F}$ et $E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$, on a $E_1 - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$.*

Soit donc $E_1 \varepsilon \mathcal{F}$ et désignons par $\mathcal{H}_1$ la famille de tous les ensembles E, tels que $E_1 - E \varepsilon B(\mathcal{F})$. Je dis que la famille $\mathcal{H}_1$ jouit des propriétés 1°, 2° et 3°.

En effet, soit $E \varepsilon \mathcal{F}$: d'après $E_1 \varepsilon \mathcal{F}$ et d'après (2), nous aurons $E_1 - E \varepsilon B(\mathcal{F})$; d'après la définition de la famille $\mathcal{H}_1$ nous avons donc $E \varepsilon \mathcal{H}_1$ Nous avons ainsi démontré que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_1$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ jouit de la propriété 1°.

Soit maintenant $E = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$, où $H_n \varepsilon \mathcal{H}_1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ D'après la définition de la famille $\mathcal{H}_1$ nous avons donc $E_1 - H_n \varepsilon B(\mathcal{F})$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$ jouissant de la propriété 3°, la formule

$$E_1 - E = E_1 - (H_1 + H_2 + H_3 + \ldots) = (E_1 - H_1)(E_1 - H_2)(E_1 - H_3)\ldots$$

donne donc $E_1 - E \varepsilon B(\mathcal{F})$ et il en résulte, d'après la définition de la famille $\mathcal{H}_1$, que $E \varepsilon \mathcal{H}_1$. Nous avons ainsi démontré que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ jouit de la propriété 2°.

Soit enfin $E = H_1 H_2 H_3 \ldots$, où $H_n \varepsilon \mathcal{H}_1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$ jouissant de la propriété 2°, la formule

$$E_1 - E = E_1 - H_1 H_2 H_3 \ldots = (E_1 - H_1) + (E_1 - H_2) + (E_1 - H_3) + \ldots$$

donne donc $E_1 - E \varepsilon B(\mathcal{F})$, et il en résulte, d'après la définition de la famille $\mathcal{H}_1$, que $E \varepsilon \mathcal{H}_1$. La famille $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ jouit donc de la propriété 3°

La famille $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ jouit donc des propriétés 1°, 2° et 3°, d'où résulte, comme nous savons, que

(4) $$B(\mathcal{F}) \subset \mathcal{H}_1.$$

Soit maintenant $E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$: d'après (4) nous aurons $E_2 \varepsilon \mathcal{H}_1$, donc, d'après la définition de la famille $\mathcal{H}_1$, $E_1 - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$. La propriété (3) est ainsi établie.

Soit maintenant $E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$ et désignons par $\mathcal{E}$ la famille de tous les ensembles E, tels que $E - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$. Je dis que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ jouit des propriétés 1°, 2° et 3°.

En effet, soit $E \varepsilon \mathcal{F}$: d'après (3) nous avons $E - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$, ce qui donne, d'après la définition de la famille $\mathcal{E}$, $E \varepsilon \mathcal{E}$. Nous avons donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ jouit de la propriété 1°.

Soit maintenant $E = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$, où $H_n \varepsilon \mathcal{E}$, pour $n = 1, 2, 2, \ldots$ D'après la définition de la famille $\mathcal{E}$, nous avons donc $H_n - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$ jouissant de la propriété 2°, la formule

$$E - E_2 = (H_1 + H_2 + H_3 + \ldots) - E_2 = (H_1 - E_2) + (H_2 - E_2) + \\ + (H_3 - E_2) + \ldots$$

donne $E - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$, et il en résulte, d'après la définition de la famille $\mathcal{E}$, que $E \varepsilon \mathcal{E}$. La famille $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ jouit donc de la propriété 2°.

Pareillement, en s'appuyant sur la formule

$$H_1 H_2 H_3 \ldots - E = (H_1 - E)(H_2 - E)(H_3 - E) \ldots,$$

et sur la propriété 3° de la famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$, on prouve sans peine que la famille $H = \mathcal{E}$ jouit de la propriété 3°.

La famille $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ jouit donc des propriétés 1°, 2° et 3°, d'où résulte que

(5) $$B(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $E_1 \varepsilon B(\mathcal{F})$: d'après (5), nous aurons $E_1 \varepsilon \mathcal{E}$, donc, d'après la définition de la famille $\mathcal{E}$, $E_1 - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$.

Nous avons ainsi démontré que

Si $E_1 \varepsilon B(\mathcal{F})$ et $E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$, on a $E_1 - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$.

Il est donc établi que la famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$ satisfait à la condition 4°, c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré.

Comme une aplication de notre théorème, désignons par $\mathcal{F}$ la famille de tous les intervalles fermés (où, si l'on veut, de tous les intervalles fermés aux extrémités rationnelles). Si $E_1 \varepsilon \mathcal{F}$ et $E_2 \varepsilon \mathcal{F}$, l'ensemble $E_1 - E_2$ est, comme on voit sans peine, une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille $\mathcal{F}$: d'après la propriété 2° de la famille $\mathcal{H} = B(\mathcal{F})$, on a donc $E_1 - E_2 \varepsilon B(\mathcal{F})$. La condition (2) est donc remplie et on peut appliquer notre théorème. On a donc, dans notre cas, la formule (1) [1].

[1] Cf. W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 31 - 32.

Sur une classe d'espaces riemanniens à trois dimensions.

Par

W. Ślebodziński.

L'article présent est consacré à la détermination des espaces riemanniens à trois dimensions dont les congruences principales sont formées de trajectoires orthogonales des familles isothermes. Dans tout ce qui va suivre je désigne ces variétés par le symbole (I_3). Après avoir rappelé quelques formules du calcul des congruences orthogonales de MM. Ricci et Levi-Civita (n° 1), je démontre qu'il y a cinq espèces différentes d'espaces (I_3) (n°s 2—5). Une classe particulièrement intéressante d'espaces (I_3) est constituée par les variétés qui peuvent être représentées géodésiquement sur une autre. On sait que l'élément linéaire d'un tel espace est une forme généralisée de Liouville; à l'égard de cette forme je donne quelques propositions dans le n° 6. L'article se termine (n°s 7 et 8) par une application des resultats précédemment obtenus à la recherche de tous les systèmes orthogonaux et isothermes d'un espace à courbure constante différente de zéro.

Pour les notations et méthodes employées je renvoie au Mémoire de MM. G. Ricci et T. Levi-Civita Méthodes de calcul différentiel absolu et ses applications (Math. Annalen Bd. 54, 1901).

1. Soit donnée une forme définie positive

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

caractérisant la métrique d'un espace riemannien (V_3). Considérons dans cet espace un système (S) formé de trois congruences [1], [2],

[3] de courbes et supposons que dans chaque point deux courbes, appartenant à deux quelconques de ces congruences, sont orthogonales l'une à l'autre. M étant un point arbitraire de (V_3), désignons par (i) $(i=1, 2, 3)$ la courbe appartenant à la congruence $[i]$ et partant de ce point, par s_i son arc compté à partir d'un point arbitraire et par $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \lambda_i^{(3)}$ les composantes contravariantes d'un vecteur unitaire $\overline{e}_i$ tangent à la courbe (i) au point M. Les trois vecteurs $\overline{e}_i$ forment un trièdre (T) dont les rotations γ_{hij} sont données par les formules

$$\text{(2)} \qquad \gamma_{hij} = \sum_{rs=1}^{3} \lambda_{h/rs} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \qquad (h, i, j = 1, 2, 3),$$

$\lambda_{i/r}$ étant les composantes covariantes du vecteur $\overline{e}_i$ et $\lambda_{i/rs}$ leurs dérivées covariantes par rapport à la forme (1). Les rotations du trièdre (T) donnent naissance à neuf invariants ω_{ik} définis au moyen des égalités

$$\text{(3)} \qquad \omega_{ik} = \frac{\partial \gamma_{i+1\, i+2\, k+1}}{\partial s_{k+2}} - \frac{\partial \gamma_{i+1\, i+2\, k+2}}{\partial s_{k+1}} + \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \gamma_{i+1\, i+2\, j} (\gamma_{jk+1\, k+2} - \gamma_{jk+2\, k+1}) + \\ + \gamma_{ji+1\, k+2}\, \gamma_{k+2\, k+1} - \gamma_{ji+1\, k+1}\, \gamma_{ji+2\, k+2} \Big\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

et satisfaisant aux relations

$$\omega_{ik} = \omega_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dans les formules ci-dessus et dans tout l'article nous regardons comme égaux deux indices dont la différence est divisible par 3. Si le système (S) est choisi de manière qu'il soit $\omega_{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3;$ $i \neq k)$, ses congruences sont formées de courbes principales de l'espace (V_3) et les quantités

$$\text{(4)} \qquad \omega_i = \omega_{ii} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont les courbures principales de celui-ci. Au trièdre (T) nous donnons, dans ce cas, le nom de trièdre principal.

Construisons un second système orthogonal (S') formé de congruences [1'], [2'], [3'] et désignons par $\lambda'_{i/r}$ les composantes covariantes de trois vecteurs unitaires e'_i $(i = 1, 2, 3)$ tangents au point M aux courbes de ces congruences. On aura les relations

$$\text{(5)} \qquad \lambda'_{i/r} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_{ih} \lambda_{h/r} \qquad (i, r = 1, 2, 3),$$

où les α_{ih} désignent les coefficients d'une substitution orthogonale. En se servant des formules (2), on trouve les expressions suivantes pour les rotations γ'_{hij} du trièdre (T')

$$\gamma_{hij} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk} A_{hik} + \sum_{klm=1}^{3} \alpha_{hk} \alpha_{il} \alpha_{jm} \gamma_{klm} \qquad (h, i, j = 1, 2, 3), \tag{6}$$

où nous avons posé

$$A_{hik} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{ir} \frac{\partial \alpha_{hr}}{\partial s_k} \qquad (h, i, k = 1, 2, 3).$$

Si la congruence [3] est formé de trajectoires orthogonales d'une famille (F) de surfaces et les congruences [1] et [2] de lignes de courbure de celles-ci, on aura

$$\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0;$$

les rotations γ_{131}, γ_{232} sont, dans ce cas, des courbures normales et les rotations γ_{121}, γ_{212} des courbures géodésiques des lignes de courbure. Pour que les trois congruences du système (S) soient des congruences normales, il faut et il suffit que les rotations à trois indices différents soient nulles.

En terminant ce n°, supposons que l'élément linéaire de l'espace (V_3) soit réduit à la forme

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^2 \, dx_i$$

et considérons le système orthogonal (S) dont la congruence $[i]$ est formée de courbes coordonnées $x_{i+1} = \text{const.}$, $x_{i+2} = \text{const.}$ Les formules (2) pour les rotations du trièdre correspondant deviennent dans ce cas

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}, \; \gamma_{ijk} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3; \; i \neq j \neq k \neq i), \tag{7}$$

si l'on pose

$$\lambda_i^{(i)} = \frac{1}{H_i}, \; \lambda_i^{(i+1)} = 0, \; \lambda_i^{(i+2)} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ajoutons que les rotations $\gamma_{i+1\,i\,i+1}$, $\gamma_{i+2\,i\,i+2}$ sont des courbures normales et les rotations $\gamma_{i+1\,i+2\,i+1}$, $\gamma_{i+2\,i+1\,i+2}$ des courbures géodésiques des lignes de courbure des surfaces $x_i = \text{const.}$

Dans tout ce qui suit, nous désignerous par une grande lettre affectée de deux indices i, k une fonction de deux variables x_i, x_k et par une petite lettre affectée de l'indice i une fonction de la seule variable x_i; par les lettres de l'alphabet grec nous désignerons des constantes.

2. Les congruences principales d'un espace (I_3) étant formées de trajectoires orthogonales de trois familles isothermes, celles-ci appartiennent à un système triple orthogonal. Il en résulte que l'élément linéaire d'un espace (I_3) peut être ramené à la forme [1])

$$(8) \qquad ds^2 = U_{31}^2 U_{12}^2 dx_1^2 + U_{12}^2 U_{23}^2 dx_2^2 + U_{23}^2 U_{31}^2 dx_3^2.$$

En gardant les notations du n° 1, désignons par (S) le système des congruences de courbes coordonnées de l'espace (8). Pour que la forme (8) soit l'élément linéaire d'un espace (I_3), il faut et il suffit que les congruences du système (S) soient des congruences principales. On doit donc avoir

$$\omega_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k).$$

En appliquant les formules (3) et (7), les conditions précédentes deviennent

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_2}\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3}\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_2} = 0, \\ &\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3}\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3}\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_1}\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_2}\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_1} = 0. \end{aligned}$$

La recherche des espaces (I_3) est donc ramené à la résolution du système (9).

Supposons en premier lieu qu'aucune de dérivées premières des fonctions U_{ik} n'est pas identiquement nulle. En tirant de deux premières équations (9) les valeurs de $\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1}$ et de $\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_2}$, on a

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux, 2ème éd., 1910, p. 217.

$$\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3}\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_1}}{\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3}},$$

$$\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_2}\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3}}{\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3}}.$$

(Le dénominateur de seconds membres est différent de zéro, l'hypothèse contraire conduisant, d'après la deuxième des équations (9), au résultat $\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_1} = 0$). On déduit de la condition

$$\frac{\partial^2 \log U_{12}}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial^2 \log U_{12}}{\partial x_2\, \partial x_1}$$

la relation suivante

$$\frac{\frac{\partial^2 \log U_{23}}{\partial x_2\, \partial x_3}}{\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_2}\,\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3}} = \frac{\frac{\partial^2 \log U_{31}}{\partial x_3\, \partial x_1}}{\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3}\,\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_1}}.$$

En traitant de la même manière les dérivées de la fonction U_{23}, on est conduit au résultat que les trois expressions

$$(10) \qquad \frac{\frac{\partial^2 \log U_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k}}{\frac{\partial \log U_{ik}}{\partial x_i}\,\frac{\partial \log U_{ik}}{\partial x_k}} \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$$

doivent être égales. Leur valeur commune étant nécessairement une constante, nous supposons d'abord qu'elle est différente de zéro et nous la désignerons par $-\frac{1}{\alpha}$; nous aurons ensuite

$$U_{12} = (m_1 + m_2)^\alpha,\quad U_{22} = (n_2 + n_3)^\alpha;\quad U_{31} = (p_3 + p_1)^\alpha.$$

En substituant ces expressions dans les équations (9), nous obtenons les relations

$$(m_1 + m_2)\, n_2' p_3' + (p_3 + p_1)\, m_2' n_3' - (n_2 + n_3)\, p_3' m_2' = 0,$$
$$(n_2 + n_3)\, p_3' m_1' + (m_1 + m_2)\, n_3' p_1' - (p_3 + p_1)\, m_1' n_3' = 0,$$
$$(p_3 + p_1)\, m_1' n_2' + (n_2 + n_3)\, p_1' m_2' - (m_1 + m_2)\, n_2' p_1' = 0.$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à x_1, on trouve l'équation

$$\frac{m_1'}{p_1'} \cdot \frac{n_2'}{m_2'} \cdot \frac{p_3'}{n_3'} = -1.$$

Les trois rapports qui y se présentent devant être constants, on peut poser sans restreindre la généralité de la solution

$$\frac{m_1'}{p_1'} = \frac{n_2'}{m_2'} = \frac{p_3'}{n_3'} = -1.$$

et, par conséquent,

$$m_1 + p_1 = \varepsilon_1, \quad n_2 + m_2 = \varepsilon_2, \quad p_3 + n_3 = \varepsilon_3.$$

On aura donc

$$U_{12} = (m_1 - n_2 + \varepsilon_2)^\alpha, \; U_{23} = (n_2 - p_3 + \varepsilon_3)^\alpha, \; U_{31} = (p_3 - m_1 + \varepsilon_1)^\alpha.$$

Les expression précédentes satisfont aux équations (9) sous la condition

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

On satisfatt a cette relation en posant

$$\varepsilon_1 = \rho_2 - \rho_3, \quad \varepsilon_2 = \rho_3 - \rho_1, \quad \varepsilon_2 = \rho_1 - \rho_2,$$

où l'on a désigné par ρ_1, ρ_2, ρ_3 des constantes arbitraires. En introduisant les notations

$$a_1 = m_1 - \rho_1, \quad a_2 = n_2 - \rho_2, \quad a_3 = p_3 - \rho_3,$$

on obtient les formules

$$U_{12} = (a_1 - a_2)^\alpha, \quad U_{23} = (a_2 - a_3)^\alpha, \quad U_{31} = (a_3 - a_1)^\alpha,$$

constituant la première solution du système (9). Il est visible que l'élément linéaire correspondant à cette solution peut être ramené à la forme suivante

$$(\mathrm{A}_1) \quad ds_2 = \frac{[(x_3 - x_1)(x_1 - x_1)]^{2\alpha}}{r_1} dx_1^2 + \frac{[(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)]^{2\alpha}}{r_2} dx_2^2 + \frac{[(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)]^{2\alpha}}{r_3} dx_3^2,$$

où l'on a désigné par r_i une fonction arbitraire de la seule variable x_i et par α une constante arbitraire différente de zéro.

3. Supposons maintenant que la valeur commune des expressions (10) est nulle. On aura donc

$$\frac{\partial^2 \log U_{ik}}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3; \; i \neq k)$$

et, par suite,

$$U_{12} = u_1 u_2, \quad U_{23} = v_2 v_3, \quad U_{31} = w_3 w_1.$$

L'élément linéaire (8) peut donc être réduit, par un choix convenable de paramètres, à la forme

$$(11) \qquad ds^2 = (c_3 a_2)^2 dx_1^2 + (a_1 b_3)^2 dx_2^2 + (b_2 c_1)^2 dx_3^2.$$

En nous reportant aux équations

$$\omega_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k),$$

exprimant que les courbes coordonnées sont des courbes principales, nous trouvons la relation

$$\frac{\frac{d \log a_1}{dx_1}}{\frac{d \log c_1}{dx_1}} + \frac{\frac{d \log a_2}{dx_2}}{\frac{d \log b_2}{dx_2}} = 1$$

et deux égalités analogues qui s'en déduisent par des permutations circulaires des lettres et de leurs indices. Les rapports des dérivées qui se présentent dans les relations ci-dessus devant être constants, nous pouvons poser

$$\frac{d \log a_1}{dx_1} = \alpha \frac{d \log c_1}{dx_1}, \quad \frac{d \log b_2}{dx_2} = \beta \frac{d \log a_2}{dx_2}, \quad \frac{d \log c_3}{dx_3} = \gamma \frac{d \log b_3}{dx_3},$$

où α, β, γ désignent des constantes liées par les relations

$$(12) \qquad \alpha + \frac{1}{\beta} = 1, \quad \beta + \frac{1}{\gamma} = 1, \quad \gamma + \frac{1}{\alpha} = 1.$$

On trouve ainsi

$$a_1 = c_1^{\alpha}, \quad b_2 = a_2^{\beta}, \quad c_3 = b_3^{\gamma}.$$

En tenant compte des relations précédentes, la forme (11) devient

$$ds^2 = a_2^2 b_3^2 c_1^2 [b_3^{2\gamma-2} c_1^{-2} dx_1^2 + c_1^{2\alpha-2} a_2^{-2} dx_2^2 + a_2^{2\beta-2} b_3^{-2} dx_3^2].$$

Par un nouveau changement de paramètres cette forme peut être ramenée à la suivante

$$(A_2) \qquad ds^2 = r_1^2 r_2^2 r_3^2 \left[r_3^{-\frac{2}{\alpha}} dx_1^2 + r_1^{-\frac{2}{\beta}} dx_2^2 + r_2^{-\frac{2}{\gamma}} dx_3^2\right],$$

r_i étant une fonction arbitraire de la seule variable x_i, et α, β, γ étant des constantes satisfaisant aux relations (12). La forme (A_2) constitue la deuxième solution du notre problème. — Calculons

les rotations du système (S) de congruences de courbes coordonnées en nous servant des formules (7) du n° 1; il viendra

$$\begin{aligned} &\gamma_{121} = -r_1^{-\alpha} r_2^{-2} r_3^{-1} r_2', && \gamma_{232} = -r_1^{-1} r_2^{-\beta} r_3^{-2} r_3', \\ \text{(12a)}\quad &\gamma_{313} = -r_1^{-2} r_2^{-1} r_3^{-\gamma} r_1', && \gamma_{323} = -\beta r_1^{-\alpha} r_2^{-2} r_3^{-1} r_2', \\ &\gamma_{131} = -\gamma r_1^{-1} r_2^{-\beta} r_3^{-2} r_3', && \gamma_{212} = -\alpha r_1^{-2} r_2^{-1} r_3^{-\gamma} r_1'. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\text{(12b)}\qquad \frac{\gamma_{212}}{\gamma_{313}} = \alpha, \quad \frac{\gamma_{323}}{\gamma_{121}} = \beta, \quad \frac{\gamma_{131}}{\gamma_{232}} = \gamma.$$

En ayant égard a la signification géométrique des rotations γ_{hij} (n° 1), les relations ci-dessus nous montrent que les courbes principales de l'espace (A_2) sont des trajectoires orthogonales des surfaces de Weingarten dont les courbures principales ont un rapport constant. Si, en particulier, l'une des constantes α, β, γ est égale à -1, les surfaces correspondantes sont des surfaces minima.

4. Examinons maintenant les solutions du système (9) pour lesquelles l'une au moins des dérivées premières des fonctions U_{ik} est identiquement nulle. Supposons pour fixer les idées

$$\text{(13)}\qquad \frac{\partial U_{31}}{\partial x_1} = 0.$$

On conclut de la troisième des équations (9) que l'on aura

$$\text{(14)}\qquad \frac{\partial U_{12}}{\partial x_1}\,\frac{\partial U_{23}}{\partial x_2} = 0.$$

Il faut donc traiter séparément les deux cas: a) $\dfrac{\partial U_{23}}{\partial x_2} = 0$, b) $\dfrac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = 0$.

Nous étudierons dans ce n° le premier cas. Les deux premières des équations (9) nous donnent

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3}\right) = 0, \\ &\frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Supposons en premier lieu

$$\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = 0.$$

Nous obtenons ainsi la troisième solution du système (9)

$$U_{12} = \text{const.}, \quad U_{23} = u_3, \quad U_{31} = v_3.$$

L'élément linéaire (8) devient donc

$$(A_3) \qquad ds^2 = a_3^2\, dx_1^2 + b_3^2\, dx_2^2 + dx_3^2,$$

où l'on a désigné par a_3 et b_3 deux fonctions arbitraires de la seule variable x_3. On vérifie aisément à l'aide des formules (7) du n° 1 que toutes les rotations du système (S) sont nulles à l'excepté de γ_{131} et γ_{232}. Ces deux dernières rotations ne dépendant que de la variable x_3, on voit que dans l'espace (A_3) les surfaces $x_1 = \text{const.}$ et $x_2 = \text{const.}$ sont des surfaces totalement géodésiques et que les courbures principales des surfaces $x_3 = \text{const.}$ sont constantes en tous les points de chacune d'elles.

Examinons maintenant la seconde solution des équations (15), en supposant que l'on a

$$\frac{\partial \log U_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_3} = 0.$$

Les deux fonctions U_{31}, U_{23} ne renfermant, d'après les hypothèses faites au commencement de ce n^0, que la seule variable x_3, nous concluons de l'équation précédente

$$\frac{U_{23}}{U_{31}} = \text{const.};$$

la forme (8) devient donc

$$(A_4) \qquad ds^2 = U_{12}^2\, u_3^2\, (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

où U_{12} désigne une fonction arbitraire de deux variables x_1, x_2 et u_3 une fonction arbitraire de la seule variable x_3. Les formules (7) du n^0 1 nous montrent que les surfaces $x_3 = \text{const.}$ sont des sphères géodésiquement parallèles. (Nous donnons ici le nom de sphères aux surfaces à courbures principales é g a l e s e t c o n s t a n t e s). Nous allons montrer que, réciproquement, l'élément linéaire d'un espace contenant une famille de sphères géodésiquement parallèles est de la forme (A_4). Nous demontrerons d'abord le théorème suivant.

Théorème 1. Dans un espace riemannien à trois dimensions une famille de surfaces à courbures principales égales est une famile de Lamé.

Supposons, en effet, qu'un espace riemannien (V_3) contient une famille (F) de surfaces à courbures principales égales et considérons le système orthogonal (S) dont la congruence [3] est formée de tra-

jectoires orthogonales de la famille (F) et les congruences [1] et [2] de lignes de courbure des surfaces appartenant à (F). En gardant les notations du n⁰ 1 relatives au système (S), nous obtenons les relations

$$(16) \qquad \gamma_{312} = \gamma_{321} = 0, \quad \gamma_{131} = \gamma_{232}.$$

Construisons un second système orthogonal (S) et supposons que les congruences [3] et [3′] de deux systèmes (S) et (S') soient identiques. Nous pouvons donc poser dans les formules (5) du n⁰ 1

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = \cos\varphi, & \alpha_{12} = -\sin\varphi, & \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{21} = \sin\varphi, & \alpha_{22} = \cos\varphi, & \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{31} = 0, & \alpha_{32} = 0, & \alpha_{33} = 1. \end{array}$$

En tenant compte des relations (16), les formules (6) du n⁰ 1 nous donnent

$$\gamma'_{312} = \gamma'_{321} = 0, \quad \gamma'_{123} = -\frac{\partial\varphi}{\partial s_3} + \gamma_{123}, \quad \gamma'_{131} = \gamma'_{232}.$$

En prenant pour la fonction φ l'une quelconque des intégrales de l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_3} = \gamma_{123},$$

on aura $\gamma'_{123} = \gamma'_{231} = \gamma'_{312} = 0$, ce qui signifie que la famille (F) est une famille de Lamé (v. n⁰ 1). Le théorème démontré est une généralisation d'un théorème de M. Ricci sur les familles de surfaces totalement géodésiques [1]).

En nous appuyant sur le théorème démontré plus haut, nous voyons d'abord que l'élément linéaire d'un espace riemannien contenant une famille de sphères peut être ramené à la forme

$$ds_2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^2\, dx_i,$$

où l'on suppose que les surfaces $x_3 =$ const. sont des sphères. Les trajectoires orthogonales des sphères étant, par hypothèse, des géodésiques, nous pouvons poser $H_3 = 1$. Il suit aussi de l'hypothèse faite sur les surfaces $x_3 =$ const. que les rotations γ_{131}, γ_{232} du sy-

---

[1] G. Ricci Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni, Rend. Accad. Lincei 1903.

stème (S) formé de congruences de courbes coordonnées sont égales et que leur valeur commune ne dépend que de la variable x_3. D'après les formules (7) du n° 1 les coefficients H_1 et H_2 sont donc des fonctions de la forme suivante

$$H_1 = A_{12}\,a_3, \quad H_2 = B_{12}\,a_3$$

et, par suite,

$$ds^2 = a_3^2\,(A_{12}^2\,dx_1^2 + B_{12}^2\,dx_2^2) + dx_3^2.$$

Or, on sait que la forme binaire $A_{12}^2\,dx_1^2 + B_{12}^2\,dx_2^2$ peut être réduite à la suivante: $\overline{U}_{12}^2\,(d\overline{x}_1^2 + d\overline{x}_2^2)$; l'élément linéaire de l'espace considéré appartient donc au type (A_4), d'où il suit

Théorème 2. Un espace riemannien à trois dimensions contenant une famille de sphères géodésiquement parallèles est un espace (I_3).

5. Nous revenons maintenant aux équations (13) et (14) du n° précédent, en supposant que l'on ait

$$\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = 0.$$

D'après la convention faite à la fin du n° 1 on peut donc poser

$$U_{12} = u_2, \quad U_{31} = u_3.$$

Il est évident que les expressions ci-dessus satisfont à deux premières des équations (9), la troisième conduisant à la relation

$$\frac{d\log u_3}{dx_3}\,\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x_2} + \frac{d\log u_2}{dx_2}\,\frac{\partial \log U_{23}}{\partial x^3} - \frac{d\log u_2}{dx_2}\,\frac{d\log u_3}{dx_3} = 0$$

La solution de cette équation est donnée par la formule

$$U_{23} = u_3\,\Phi\left(\frac{u_2}{u_3}\right),$$

où $\Phi(t)$ désigne une fonction arbitraire de la variable t. La forme (8) devient donc

$$ds^2 = (u_2\,u_3)^2\,dx_2^2 + u_3^2\,\Phi^2\,[u_2^2\,dx_2^2 + u_3^2\,dx_3^2]$$

ou, si l'on effectue un changement convenable de variables,

$$(A_5) \qquad ds^2 = (x_2\,x_3)^2\,dx_1^2 + x_3^2\,\Phi^2\,[a_2^2\,dx_2^2 + a_3^2\,dx_3^2].$$

Dans la formule (A_5), donnant la cinquième solution du problème proposé, les symboles a_2 et a_3 désignent des fonctions arbitraires respectivement de x_2 et x_3 et Φ désigne une fonction arbitraire du rapport $\frac{x_2}{x_3}$.

Remarque. Dans le raisonnement qui précede nous avons supposé que les fonction u_2, u_3 ne se réduisent pas à des constantes, l'hypothèse contraire conduisant aux solutions (A_3) et (A_4) trouvées plus haut.

En calculant à l'aide des formules (7) du nº 1 les rotations du système (S), on trouve d'abord $\gamma_{212} = \gamma_{313} = 0$, ce qui nous dit que les surfaces $x_1 = \text{const.}$ de l'espace (A_5) sont des surfaces totalement géodésiques; on obtient ensuite des formules suivantes

$$(17) \qquad \begin{aligned} \gamma_{131} &= -\frac{1}{x_3^2 a_3 \Phi}, & \gamma_{232} &= -\frac{x_3 \Phi - x_2 \Phi'}{x_3^3 a_3 \Phi^2}, \\ \gamma_{121} &= -\frac{1}{x_2 x_3 a_2 \Phi}, & \gamma_{323} &= -\frac{\Phi'}{x_3^2 a_2 \Phi^2} \end{aligned}$$

qui nous seront utiles plus tard.

Nous avons examiné dans les nºs 4 et 5 toutes les solutions du système (9) qui correspondent à l'hypothèse: $\frac{\partial U_{31}}{\partial x_1} = 0$ Il est évident que d'autres solutions, que l'on peut obtenir en égalant à zéro les premières dérivées des fonctions U_{ik}, ne diffèrent que par des notations de celles trouvées plus haut. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 3. L'élément linéaire d'un espace (I_3) est réductible à l'une des formes (A_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

6.[1]) Supposons qu'un espace riemannien (V_3) contient une surface (Q) dont les lignes asymptotiques sont des géodésiques de (Q) et, par conséquent, de (V_3). Nous donnons à la surface (Q) le nom de quadrique de l'espace (V_3). M étant un point arbitraire de (Q), désignons par (c_1) et (c_2) les lignes de courbure de (Q) passant par ce point et par s_i $(i = 1, 2)$ l'arc de la ligne (c_i) compté à partir d'un point arbitraire. Considérons en M un trièdre (T) formé de deux vecteurs unitaires $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ tangents aux lignes (c_1) et (c_2) respe-

---

[1]) J'ai résumé ce nº dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris (C. R. t. 184, p. 424, 21 fevrier 1927).

ctivement et d'un vecteur unitaire $\overline{e_3}$ normal à (Q). En désignant par γ_{ijk} $(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$ les rotations de (T)[1]) et par ω l'angle que fait une ligne de (Q) passant par M avec le vecteur $\overline{e_1}$, l'équation des lignes asymptotiques devient

$$\gamma_{232} \cos^2 \omega + \gamma_{131} \sin^2 \omega = 0. \tag{18}$$

Les lignes asymptotiques étant des géodésiques de (Q), on doit avoir

$$\frac{d\omega}{ds} + \gamma_{121} \cos \omega - \gamma_{212} \sin \omega = 0, \tag{19}$$

où ds est la différentielle de l'arc de la ligne asymptotique. En différentiant l'équation (18) on obtient

$$(\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin \omega \cos \omega \frac{d\omega}{ds} + \frac{d\gamma_{232}}{ds} \sin^2 \omega + \frac{d\gamma_{131}}{ds} \cos^2 \omega = 0.$$

En y substituant la valeur de $\frac{d\omega}{ds}$ tirée de l'équation (19) et en tenant compte de l'identité $\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s_1} \cos \omega + \frac{\partial f}{\partial s_2} \sin \omega$, il vient

$$\left[\frac{\partial \gamma_{232}}{\partial s_2} \operatorname{tg}^2 \omega + \frac{\partial \gamma_{131}}{\partial s_2} - 2\gamma_{121} (\gamma_{232} - \gamma_{131})\right] \operatorname{tg} \omega + \\ + \left[\frac{\partial \gamma_{232}}{\partial s_1} \operatorname{tg}^2 \omega + \frac{\partial \gamma_{131}}{\partial s_1} + 2\gamma_{212} (\gamma_{232} - \gamma_{131})\right] = 0.$$

Cette relation devant être satisfaite pour les deux valeurs $\operatorname{tg} \omega = \pm \sqrt{-\frac{\gamma_{131}}{\gamma_{232}}}$, on obtient des conditions suivantes

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\gamma_{232}}{\gamma_{131}}\right) = 2\gamma_{212} \left(1 - \frac{\gamma_{232}}{\gamma_{131}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\gamma_{131}}{\gamma_{232}}\right) = 2\gamma_{121} \left(1 - \frac{\gamma_{131}}{\gamma_{232}}\right). \tag{20}$$

Les rotations γ_{131}, γ_{232} sont des courbures normales et les rotations γ_{121}, γ_{212} des courbures géodésiques des lignes de courbure de (Q). En introduisant les notations $k_1^{(n)} = \gamma_{131}$, $k_2^{(n)} = \gamma_{232}$, $k_1^{(g)} = \gamma_{121}$, $k_2^{(g)} = \gamma_{212}$, on peut ramener les conditions (20) à la forme suivante

$$\frac{\partial \log}{\partial s_1} \left[\frac{k_1^{(n)}}{k_1^{(n)} - k_2^{(n)}}\right] = 2k_2^{(g)}, \quad \frac{\partial \log}{\partial s_2} \left[\frac{k_2^{(n)}}{k_2^{(n)} - k_1^{(n)}}\right] = 2k_1^{(g)} \tag{21}$$

---

[1]) E. Cartan, La Géométrie des espaces de Riemann (Mémorial des Sciences math., fasc. IX, 1926, p. 43)

On peut donc énoncer le théorème suivant

Théorème 4. Pour qu'une surface d'un espace riemannien soit une quadrique, il faut et il suffit que les courbures normales et géodésiques de ses lignes de courbure satisfassent aux relations (21).

Remarquons que les relations (20) sont satisfaites, si la surface est à courbures principales égales; ces surfaces apartiennent donc aux quadriques.

Nous nous proposons maintenant de rechercher les espaces (I_3) dont les courbes principales sont des trajectoires orthogonales des familles de quadriques, en nous bornant aux cas, où les quadriques ne sont pas des surfaces à courbures principales égales. Or, il est facile à vérifier à l'aide des formules (20) et des formules analogues qu'on obtient en permutant circulairement les indices, que les espaces (I_3), correspondant aux formes quadratiques (A_2), (A_3), (A_4), ne possèdent pas de propriété définie plus haut. Il nous reste à examiner les types (A_1) et (A_5).

Nous commençons par l'étude de la forme (A_5) Il est évident que les rotations données par les formules (17) satisfont à la première des relations (20); pour que la seconde soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\Phi(t)\Phi''(t)+\Phi'^2(t)}{\Phi(t)\Phi'(t)}=\frac{1}{t},$$

où l'on a désigné par t le rapport $\frac{x_2}{x_3}$. Il suit de là que l'on peut poser sans restreindre la généralité

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_3}\right)=\sqrt{\alpha+\left(\frac{x_3}{x_3}\right)^2}, \tag{22}$$

α étant une constante quelconque. On voit donc que les surfaces $x_3=\text{const.}$ de l'espace (A_5) sont des quadriques seulement dans le cas où la fonction Φ est déterminée par la formule (22); il est facile à vérifier qu'alors les surfaces $x_2=\text{const.}$ jouissent de la même propriété; la troisième famille de surfaces coordonnées est formée de surfaces totalement géodésiques (nº 5). Ajoutons que la forme (A_5), où Φ est définie par la formule (22), comprend comme cas particulier l'élément linéaire de l'espace euclidien rapporté au système triple de Lamé, formé de deux familles de quadriques de révolution et d'une famille de plans. Il suffit, pour s'en convaincre, de poser

$$\varkappa = -1, \quad a_2^2 = \frac{4AB}{k(x_2^2 - 4AB)}, \quad a_3^2 = \frac{4AB}{k(4AB - x_3^2)},$$

A, B, k étant des constantes; la forme (A_5) devient alors identique à l'élément linéaire de l'espace euclidien rapporté au système triple défini plus haut [1]).

Nous allons maintenant étudier la forme (A_1). Calculons pour ce but les rotations du trièdre (T) relatif à cette forme, en nous servant des formules (7). On aura

$$(23) \qquad \gamma_{iji} = \frac{\alpha}{(x_i - x_j) H_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j).$$

Un calcul facile nous montre que les rotations ci-dessuo satisfont aux relations (20) et anx relations analogues qui s'en déduissent par des permutations circulaires des indices, si l'on a $\alpha = \frac{1}{2}$. La forme (A), devient dans ce cas

$$(L) \quad ds^2 = \frac{(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}{r_1} dx_1^2 + \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{r_2} dx_2^2 + \\ + \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{r_3} dx_3^2.$$

M. T. Levi-Civita a montré [2]) que l'espace euclidien dont l'élément linéaire est donné par la formule (L) (forme généralisée de Liouville) peut être représenté géodésiquement sur un autre; les espaces (L) sont les seuls qui jouissent de cette propriété. Les raisonnements précédents nous permettent d'énoncer le théorème suivant

Théorème 5. Si l'élément linéaire d'un espace riemannien (V_3) est réductible à la forme généralisée de Liouville, les congruences principales sont formées de trajectoires orthogonales des familles de quadriques appartenant à un système orthogonal et isotherme.

En résumant nos recherches, nous avons deux solutions du problème proposé plus haut (p. 67): l'une d'elles est caractérisé par la forme (A_5'), où Φ est définie par la formule (22), l'autre est déterminée par la forme (L). Dans le premier cas le système triple est formé de deux familles de quadriques et d'une famille de sur-

---

[1]) G. Darboux Leçons sur les systèmes orthogonaux, 2ème éd.. 1920, p. 269.

[2]) T. Levi-Civita Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche, Annali di Mat. 1896.

faces totalement géodésiques, dans le second on a trois familles de quadriques.

Quant à la forme (L) MM. G. Ricci et T. Levi-Civita on posé le problème suivant[1]): trouver les propriétés intrinsèques de l'espace riemannien dont l'élément linéaire est réductible à la forme (L). Or, nous pouvons énoncer le théorème suivant qui a une liaison étroile avec la question proposée:

Théorème 6. Pour que l'élément linéaire d'un espace riemannien (V_3) soit réductible à la forme généralisée de Liouville, il faut et il suffit que les congruences principales soient formées de trajectoires orthogonales de trois familles isothermiques de quadriques. Si la courbure de l'espace n'est pas constante, la réduction ne peut être réalisée que d'une seule manière au plus.

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate des recherches précédentes; à l'égard de la deuxième remarquons d'abord que les congruences principales d'un espace à trois courbures principales, différentes l'une de l'autre, sont complètement déterminées et, par suite, que la transformation de l'élément linéaire en la forme (L) ne peut être effectuée que d'une seule manière au plus. Considérons maintenant un espace dont deux courbures principales sont égales et différentes de la troisième et supposons que son élément linéaire puisse être réduit de deux manières différentes à la forme (L). Soit

$$(\bar{L}) \quad ds^2 = \frac{(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\bar{r}_1} d\bar{x}_1^2 + \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)}{\bar{r}_2} d\bar{x}_2^2 + \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)}{\bar{r}_3} d\bar{x}_3^2$$

l'une de ces formes et (L) la seconde. Les congruences de courbes coordonnées de deux formes étant des congruences principales (Théorème 5), il en résulte que les deux systèmes de congruences possèdent au moins une congruence commune. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les congruences [3] et [$\bar{3}$] qui sont identiques. On en conclut que les deux familles de surfaces $x_3 =$ const. et $\bar{x}_3 =$ const. sont aussi identiques. Les congruences [1], [2] et [$\bar{1}$], [$\bar{2}$] sont donc formées de lignes de courbure de ces surfaces. Si ces

---

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita Méthodes de calcul différentiel absolu et ses applications. Math. Ann. Bd. 54, Ch. V, § 4.

deux paires des congruences ne se confondent pas, les surfaces $v_3 = \text{const.}$ sont nécessairement à courbures principales égales, on doit donc avoir $\gamma_{131} = \gamma_{232}$ (n⁰ 1). On voit facilement à l'aide des formules (23) que cette égalité ne peut être satisfaite, ce qui montre que notre hypothèse conduit à la contradiction. En résumé, nous voyons que la proposition est établie dans les deux cas que nous avons considéré Nous montrerons dans les n^os suivants que l'élément linéaire d'un espace à courbure constante peut être réduit d'une infinité de manières, à la forme généralisée de Liouville.

7. D'après le Théorème 3 du n⁰ 5 la recherche des systèmes orthogonaux et isothermes d'un espace elliptique se réduit à la détermination des formes quadratiques à courbure positive appartenant aux types (A_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Nous entreprenons cette étude en considérant d'abord la forme (A_1). Les congruences de courbes coordonnées de cette forme étant des congruences principales, nous obtenons pour les courbures principales la formule suivante (v. n⁰ 1)

$$\omega_1 = \frac{\partial \gamma_{232}}{\partial s_3} + \frac{\partial \gamma_{323}}{\partial s_2} - \gamma_{232}^2 - \gamma_{323}^2 - \gamma_{212}\gamma_{312}$$

et deux formules analogues que l'on en déduit en permutant circulairement les indices. En supposant que la courbure de l'espace elliptique est égale à $+1$, on obtient trois équations $\omega_i = (1, 2. 3)$. En se servant des formules (23) du n⁰ 6, on trouve

$$\begin{aligned}(24)\quad &\frac{\alpha r_3'(x_1 - x_2)^{2\alpha}}{2(x_2 - x_3)} + \frac{\alpha r_2'(x_3 - x_1)^{2\alpha}}{2(x_3 - x_2)} + \frac{\alpha r_3(x_1 - x_2)^{2\alpha}}{(x_2 - x_3)^2} + \\ &+ \frac{\alpha r_2(x_3 - x_1)^{2\alpha}}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{\alpha^2 r_3(x_1 - x_2)^{2\alpha}}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)} + \frac{\alpha^2 r_2(x_3 - x_1)^{2\alpha}}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} - \\ &- \frac{\alpha^2 r_1(x_2 - x_3)^{2\alpha}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x^1)} = \Big[(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)\Big]^{2\alpha}\end{aligned}$$

et deux équations analogues. Pour déterminer la constante α et les fonctions r_i nous posons [1]) dans l'équation (24)

$$(25)\qquad x_2 = x_1 + uv, \quad x_3 = x_1 + u^{\cdot}$$

En la divisant ensuite par $u^{2\alpha\ 2}$, il viendra

---

[1]) G. Darboux, l. c., p. 244.

$$(26)\quad \begin{aligned} &\frac{(-1)^{2\alpha}\alpha r_3' v^{2\alpha} u}{2(v-1)} + \frac{\alpha r_2' u}{2(1-v)} + \frac{(-1)^{2\alpha}\alpha r_3 v^{2\alpha}}{(1-v)^2} + \frac{\alpha r_2}{(1-v)^2} + \\ &+ \frac{(-1)^{2\alpha}\alpha^2 r_3 v^{2\alpha}}{1-v} + \frac{\alpha^2 r_2}{v(v-1)} - \frac{\alpha^2 r_1 (v-1)^{2\alpha}}{v} = \\ &= (-1)^{2\alpha} v^{2\alpha} (v-1)^{2\alpha} u^{4\alpha+2}. \end{aligned}$$

Traitons d'abord le cas $\alpha > -\frac{1}{2}$. En substituant dans l'équation précédente $u = 0$, on trouvera

$$(27)\quad \begin{aligned} &\frac{(-1)^{2\alpha} r_3 v^{2\alpha}}{(1-v)^2} + \frac{r_2}{(1-v)^2} + \frac{(-1)^{2\alpha} r_3 v^{2\alpha}}{1-v} + \\ &+ \frac{\alpha r_2}{v(v-1)} - \frac{\alpha r_1 (v-1)^{2\alpha}}{v} = 0. \end{aligned}$$

L'équation (27) ne renferme que les variables x_1, v. Multiplions les deux membres de cette équation par $(1-v)^2$ et posons $v = 1$; on aura

$$r_2(x_1) + (-1)^{2\alpha} r_3(x_1) = 0.$$

De même, en multipliant cette équation par v et en y posant ensuite $v = 0$, on obtiendra

$$r_2(x_1) + (-1)^{2\alpha} r_1(x_1) = 0.$$

En raisonnant de la même manière sur les équations qui se déduisent de l'équation (24) par la permutation circulaire des indices, on verra que l'on a

$$r_1(t) = r_2(t) = r_3(t).$$

En rapprochant ce résultat à l'équation (27), on trouve la relation suivante

$$(28)\quad -\frac{v^{2\alpha}}{(1-v)^2} + \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{\alpha v^{2\alpha}}{1-v} + \frac{\alpha}{v(v-1)} - \frac{\alpha(v-1)^{2\alpha}}{v} = 0,$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs de la variable v. Si nous posons $v = 2$, $v = 1$, nous obtiendrons deux conditions

$$2^\alpha = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 2\alpha 2^{2\alpha} = 1 + 2\alpha,$$

d'où il suit

$$2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0.$$

Cette équation a deux racines $\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$; la première, ne remplissant pas la condition $\alpha > -\frac{1}{2}$, doit être rejetée, la seconde

satisfait à l'équation (28). Si l'on fait dans l'équation (24) $\alpha = \frac{1}{2}$, il viendra

$$r_3'(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) - r_2'(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)^2 + \\ + 2r_3(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_1) + 2r_2(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)^2 - r_3(x_1 - x_2)^2 \\ (x_2 - x_3) - r_2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)^2 + r_1(x_2 - x_3)^2 = 4(x_1 - x_2)^2 \\ (x_2 - x_3)^3 (x_3 - x_1)^2.$$

Prenons la dérivée cinquième par rapport a x_1, on aura

$$r_1^{(5)}(x_1) = 0.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut les trois symboles $r_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ représentent une même fonction; or, la dernière relation donne pour celle-ci un polynome du quatrième degré. On vérifie aisément qu'on satisfait à l'équation (24) en posant $\alpha = \frac{1}{2}$ et

$$(29) \qquad r_i = 4x_i^4 + mx_i^3 + nx_i^2 + px_i + q \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où m, n, p, q désignent des constantes quelconques. Nous obtenons ainsi la première solution du problème proposé

$$(E_1') \qquad ds^2 = \frac{(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}{r_1} dx_1^2 + \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{r_2} dx_2^2 + \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{r_3} dx_3^2,$$

où r_i sont des fonctions définies par la formule (29). Il résulte du Théorème 5 (nº 6) que les surfaces $x_i = \text{const.}$ sont des quadriques.

Désignons par y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées de Weierstrass d'un point quelconque M de l'espace elliptique à courbure $+1$. On aura donc

$$(30) \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i^2 = 1,$$

et l'élément linéaire de l'espace sera donné par la formule

$$(31) \qquad ds^2 = \sum_{i=1}^{4} dy_i^2.$$

Considérons les surfaces homofocales définies par l'équation

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{y_i^2}{a_i - x} = 0,$$

où nous supposons $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, x étant un peramètre variable. En désignant par x_i $(i=1, 2, 3)$ les valeurs de x correspondantes aux trois quadriques passant par M, on obtiendra pour les coordonnées de ce point la formule suivante

$$y_1^2 = \frac{(a_1 - x_1)(a_1 - x_2)(a_1 - x_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)}$$

et trois autres qui se déduisent de celle-ci par la permutation circulaire des indices des lettres y et a. En calculant à l'aide de ces expression et de la formule (31) l'élément linéaire de l'espace considéré, on obtient la formule

$$ds^2 = \frac{(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}{f(x_1)} dx_1^2 + \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{f(x_2)} dx_2^2 + \\ + \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{f(x_3)} dx_3^2,$$

où nous avons posé

$$f(x) = 4(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4).$$

Nous voyons donc que les équations

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{y_i^2}{a_i - x_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

où x_i est assujetti à rester dans l'intervalle (a_i, a_{j+1}), définissent un système orthogonal et isotherme appartenant au type (E_1').

Nous avons obtenu la solution ci-dessus, en supposant que la constante α dans l'équation (24) satisfait à l'inégalité $\sigma > -\frac{1}{2}$. On vérifie facilement à l'aide de l'équation (26) qu'il n'y a aucune solution remplissant la condition $\alpha < -\frac{1}{2}$. Il nous reste à examiner le cas $\alpha = -\frac{1}{2}$. L'équation (26) devient alors

$$\frac{r_3' u}{v(v-1)} + \frac{r_2' u}{v-1} + \frac{2r_3}{v(v-1)^2} - \frac{2r_2}{(v-1)^2} + \frac{r_3}{v(v-1)} + \\ + \frac{r_2}{v(v-1)} - \frac{r_1}{v(v-1)} = -\frac{4}{v(v-1)}.$$

En y posant $u = 0$, on obtient la condition

$$2r_3 - 2vr_2 + (v-1)(r_3 + r_2 - r_1 + 4) = 0.$$

En tenant compte des formules (25), on voit que les symboles r_i

désignent maintenant des fonctions de la variable x_1. On conclut de l'équation précédente, si l'on y fait $v=0$ et $v=1$, que les fonctions $r_i(x_1)$ doivent remplir les conditions

$$r_1 = 4, \quad r_2 = r_3,$$

en d'autres termes les fonctions r_i $(i=1, 2, 3)$ sont identiquement égales au nombre 4. Voilà donc notre deuxième solution

$$(E_1'') \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2}{4(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)} + \frac{dx_2^2}{4(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} + \\ + \frac{dx_3^2}{4(x^2 - x_3)(x_3 - x_1)}.$$

On voit bien que le système orthogonal correspondant à la forme (E_1'') est un système imaginaire.

Les systèmes orthogonaux définis par les formes (E_1') et (E_1'') sont les seuls qui appartiennent au type (A_1). Reprenons maintenant la forme (A_2) du n° 3. En vertu des relations (12 b) du même n° les équations $\omega_i = 1$ $(i=1, 2, 3)$ se réduiront aux relations suivantes

$$(32) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\gamma_{232}}{\partial s_3} + \beta\frac{\partial\gamma_{121}}{ds^2} - \alpha\gamma_{313}^2 - \beta^2\gamma_{121}^2 - \gamma_{232}^2 = 1, \\ &\frac{\partial\gamma_{313}}{\partial s_1} + \gamma\frac{\partial\gamma_{232}}{\partial s_3} - \gamma_{313}^2 - \beta\gamma_{121}^2 - \gamma^2\gamma_{232}^2 = 1, \\ &\frac{\partial\gamma_{121}}{\partial s_2} + \alpha\frac{\partial\gamma_{313}}{\partial s_1} - \alpha^2\gamma_{313}^2 - \gamma_{121}^2 - \gamma\gamma_{232}^2 = 1. \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par $\alpha\gamma$. $-\alpha$, 1 et par $-\gamma$, 1, $\beta\gamma$. On verra, pourvu qu'on tienne compte des relations (12) du n° 3, que le résultat de ces opérations sera de la forme suivante

$$\begin{aligned} (1-\beta)\gamma_{121}^2 + \gamma\gamma_{232}^2 + (\alpha^2 - \alpha)\gamma_{313}^2 = 0, \\ \beta\gamma_{121}^2 + (\gamma^2 - \gamma)\gamma_{232}^2 + (1-\alpha)\gamma_{313}^2 = 0. \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations, on aura

$$\gamma_{121}^2 + \gamma^2\gamma_{232}^2 + (\alpha - 1)^2\gamma_{313}^2 = 0.$$

En se reportant aux formules (12*a*) du n° 3, la relation précédente devient

$$(33) \quad r_1^{-2\alpha} r_2^{-4} r_3^{-2} r_2'^2 + \gamma^2 r_1^{-2} r_2^{-2\beta} r_3^{-4} r_3'^2 + (\alpha - 1)^2 r_1^{-4} r_2^{-2} r_3^{-2\gamma} r_1'^2 = 0,$$

ou

$$r_1^{-2\alpha} r_2^{-2} r_3^{2\gamma-2} r_2'^2 + \gamma^2 r_1^{-2} r_2^{2-2\beta} r_3^{2\gamma-4} r_3'^2 + (\alpha-1)^2 r_1^{-4} r_1'^2 = 0.$$

En différentiant cette relation par rapport a x_2, on en déduit l'équation suivante

$$r_2'[r_1^{2-2\alpha} r_2^{2\beta-4}(r_2'' r_2 - r_2'^2) + (1-\beta)\gamma^2 r_3^{-2} r_3'^2] = 0.$$

Remarquons que, d'après les relations (12), aucune des constantes β, γ ne peut être nulle ou égale à un. Pourque la dernière équation soit satisfaite, il faut donc que l'une au moins des fonctions r_i $(i = 1, 2, 3)$ se réduise à une constante. Eu égard à la forme des coefficients de l'élément linéaire (A_2), on peut se borner au cas où l'on a: $r_3 = 0$. L'équation (33) devient alors

$$\left(\frac{r_2'}{r_2}\right)^2 + (\alpha-1)^2 r_3^{2-2\gamma}(r_1^{\alpha-2} r_1')^2 = 0.$$

Il en résulte

$$r_2' = \mu r_2, \quad r_1' = \nu r_1^{2-\alpha},$$

où μ et ν désignent deux constantes. En substituant ces expressions dans la première des équations (32), on aura

$$r_1^{-2\alpha} r_2^{-2}[\mu^2\beta(1-\beta) r_3^{-2} - \alpha\nu^2 r_3^{-2\gamma}] = 1.$$

Cette relation ne peut être satisfaite que si les deux fonctions r_1, r_2 se réduisent à de constantes, ce qui prouve que la courbure de la forme (A_2) doit être nulle. Il n'existe donc aucune solution du problème proposé qui appartienne au type (A_2).

Nous allons examiner la forme (A_3). Les rotations du trièdre principal sont données par les formules

$$\gamma_{212} = \gamma_{313} = \gamma_{121} = \gamma_{323} = 0, \quad \gamma_{131} = -\frac{\partial \log a_3}{dx_3}, \quad \gamma_{232} = -\frac{\partial \log b_3}{dx_3}.$$

Les équations $\omega_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ se réduisent donc aux suivantes

$$\frac{d^2 \log a_3}{dx_3^2} + \left(\frac{d \log a_3}{dx_3}\right)^2 + 1 = 0, \quad \frac{d^2 \log b_3}{dx_3} + \left(\frac{d \log b_3}{dx_3}\right)^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{d \log a_3}{dx_3} \frac{d \log b_3}{dx_3} + 1 = 0.$$

La solution, la plus générale, de ces équations est donnée par les formules

$$a_3 = \mu \cos(\lambda - x_3), \quad b_3 = \nu \sin(\lambda - x_3),$$

λ, μ, ν étant des constantes quelconques. La forme (A_3) peut donc être réduite à la suivante:

$$(E_3) \qquad ds^2 = \cos^2 x_3 \, dx_1^2 + \sin^2 x_3 \, dx_2^2 + dx_3^2,$$

ce qui donne la troisième solution.

Considérons dans l'espace elliptique à courbure $+1$ une famille de quadriques et deux familles de plans dont les équations, en coordonnées de Weierstrass, sont les suivantes

$$y_2^2 + y_3^2 = \sinh^2 \rho (y_1^2 + y_4^2), \quad y_3 = y_2 \operatorname{tg} \varphi, \quad y_4 = y_1 \operatorname{tg} \psi.$$

On en déduit les expressions suivantes

$$y_1 = \frac{\cos \psi}{\cosh \rho}, \quad y_2 = \operatorname{tgh} \rho \cos \varphi, \quad y_3 = \operatorname{tgh} \rho \sin \varphi, \quad y_4 = \frac{\sin \psi}{\cosh \rho}$$

pour les coordonnées d'un point quelconque en fonction des paramètres variables de ces trois familles. En portant les valeurs ci-dessus dans là formule (31), on obtient

$$ds_2 = \operatorname{tgh}^2 \rho \, d\varphi^2 + \frac{d\psi^2 + d\rho^2}{\cosh^2 \rho}.$$

La transformation $\varphi = x_2$, $\varphi = x_1$, $\sinh \rho = \operatorname{tg} x_3$ ramenant cette formule à la forme (E_3), on voit que celle-ci est l'élément linéaire d'un espace elliptique, rapporté au système triple formé d'une famille de surfaces de Clifford et de deux familles de plans.

Dans le cas de la forme (A_4) les rotations du trièdre principal sont définies par les formules

$$\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0, \quad \gamma_{131} = \gamma_{232} = -\frac{d \log u_3}{dx_3}, \quad \gamma_{121} = -\frac{1}{U_{12} u_3} \frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1},$$

$$\gamma_{212} = -\frac{1}{U_{12} u_3} \frac{\partial \log U_{12}}{\partial x_1}.$$

et, par suite, les conditions du problème proposé peuvent s'écrire comme il suit

$$\frac{d_2 \log u_3}{dx_3^2} + \left(\frac{d \log u_3}{dx_3}\right)^2 + 1 = 0, \quad -\frac{1}{2 U_{12}^2} \left[\frac{\partial^2 \log U_{12}^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \log U_{12}^2}{\partial x_2^2}\right] =$$

$$u_3^2 \left[1 + \left(\frac{d \log u_3}{dx_3}\right)^2\right]$$

En choisissant convenablement les constantes d'intégration, on peut prendre $u_3 = \cos x_3$, ce qui réduit la seconde équation à la suivante

$$(34) \qquad -\frac{1}{2U_{12}^2}\left[\frac{\partial^2 \log U_{12}^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \log U_{12}^2}{\partial x_2^2}\right] = 1.$$

Celle-ci exprime que la courbure de la forme $U_{12}^2\,(dx_1^2 + dx_2^2)$ est égale à $+1$. La quatrième solution est donc caractérisée par la forme

$$(\mathrm{E}_4) \qquad ds^2 = U_{12}^2 \cos^2 x_3 (dx_1^2 + dx_2^2) + dx_3^2,$$

où U_{12} désigne une fonction quelconque des variables x_1, x_2, satisfaisant à l'équation (34). Dans le système orthogonal de l'espace elliptique, défini par la forme (E_4), les surfaces $x_3 = \text{const.}$ sont des sphères géodésiquement parallèles, et celles $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$ sont des développables. Un système particulier appartenant au type (E_4) est caractérisé, en coordonnées de Weierstrass, par les équations suivantes

$$y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,y_1^2, \qquad y_2^2 + y_3^2 - \cot g^2 \varphi\, y_4^2 = 0, \qquad y_3 = y_2 \operatorname{tg} \psi.$$

Il est composé de sphères, de cônes et de plans. La recherche du système le plus général se réduit à la détermination des systèmes isothermes sur la sphère.

Il nous reste à examiner le cas de la forme (A_5). En utilisant les formules (17) du nº 5, on peut écrire les équations $\omega_2 = \omega_3 = 1$ comme il suit

$$(35) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{x_3^2 a_3^2} + \frac{a_3'}{x_3 a_3^3} - \frac{x_2 \Phi'}{x_3^3 a_3^2 \Phi} - \frac{\Phi'}{x_2 x_3 a_2^2 \Phi} &= x_3^2 \Phi^2, \\ -\frac{1}{x_3^2 a_3^2} + \frac{a_2'}{x_2 a_2^3} + \frac{x_2 \Phi'}{x_3^3 a_3^2 \Phi} + \frac{\Phi'}{x_2 x_3 a_2^2 \Phi} &= x_3^2 \Phi^2, \end{aligned}$$

Φ' désignant, comme précédemment, la dérivée de la fonction $\Phi\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$ par rapport à $\frac{x_2}{x_3}$. En ajoutant les équations (35), il vient

$$(36) \qquad \frac{a_2'}{x_2 a_2^3} + \frac{a_3'}{x_3 a_3^3} = 2\,x_3^2 \Phi^2$$

et par suite,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2\, \partial x_3}(x_3^2 \Phi^2) = 0.$$

En faisant $t = \frac{x_2}{x_3}$, l'équation dernière peut être remplacée par la suivante

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} + \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{t},$$

dont l'intégrale est donnée par la formule $\Phi^2 = At^2 + A'$, A et A' étant deux constantes quelconques. Si l'on revient aux variables x_1, x_2, on aura

(37) $$\Phi^2 = \frac{Ax_2^2 + A'x_3^2}{x_3^2}.$$

Portons cette expression dans l'équation (36); il viendra

$$\frac{a_2'}{a_2^3} = 2Ax_2^3 - B, \quad \frac{a_3}{a_3^3} = 2A'x_3^3 + B$$

où B est une troisième constante arbitraire. On en déduit

(38) $$\frac{1}{a_2^2} = -Ax_2^4 + Bx_2^2 + C, \quad \frac{1}{a_3^2} = -A'x_3^4 - Bx_3^2 + C',$$

C et C' étant deux constantes quelconques. Les fonctions Φ, a_2, a_3 devant satisfaire aux équations (35), on en obtient la relation

(39) $$AC = A'C'.$$

Un calcul, un peu long mais très facile, montre que les fonctions Φ, a_2, a_3, définies par les formules (37) et (38), satisfont aussi à l'équation $\omega_1 = 1$, pourvu qu'on tienne compte de la relation (39). La forme

$$ds^2 = (x_2 x_3)^2 dx_1^2 + (Ax_2^2 + A'x_3^2)\left[\frac{dx_2^2}{-Ax_2^4 + Bx_2^2 + C} + \right.$$
$$\left. + \frac{dx_3^2}{-A'x_3^4 - Bx_3^2 + C'}\right],$$

fournit donc la cinquième solution du problème proposé, si l'on choisit les constantes A, A', C, C' de manière qua la condition (39) soit satisfaite. On peut évidemment, sans restreindre la généralité, supposer que l'on ait $C = A'$, $C' = A$. La formule précédente devient alors

(E_5) $$ds^2 = (x_2 x_3)^2 dx_1^2 + (Ax_2^2 + A'x_3^2)\left[\frac{dx_2^2}{-Ax_2^4 + Bx_2^2 + A'} + \right.$$
$$\left. + \frac{dx_3^2}{-A'x_3^4 - Bx_3^2 + A}\right].$$

D'après les résultats obtenus dans le n⁰ précédent, nous voyons que le système orthogonal, convenant à la forme (E_5), se compose de deux familles de quadriques et d'une famille de plans.

Considérons le système de trois familles de surfaces, caractérisées, en coordonnées de Weierstrass, par les équations suivantes

$$\frac{y_1^2}{x_2^2-\frac{m}{k}}+\frac{y_2^2+y_3^2}{x_2^2}+\frac{y_4^2}{x_2^2+\frac{k}{n}}=0,$$

$$\frac{y_1^2}{x_3^2+\frac{n}{k}}+\frac{y_2^2+y_3^2}{x_3^2}+\frac{y_4^2}{x_3^2-\frac{k}{m}}=0,$$

$$y_3=y_2\operatorname{tg}x_1,$$

où k, m, n sont des constantes quelconques et x_1, x_2, x_3 des paramètres variables. On déduit de ces équations les formules suivantes pour les coordonnées d'un point quelconque de l'espace elliptique à courbure $=1$

$$y_1^2=\frac{(m-kx_2^2)(n+kx_3^2)}{k^2+mn},\quad y_2=x_2x_3\cos x_1,\quad y_3=x_2x_3\sin x_1,$$

$$y_4^2=\frac{(k+nx_2^2)(k-mx_3^2)}{k^2+mn}.$$

En portant ces expressions dans la formule (31), celle-ci devient

$$ds^2=(x_1x_3)^2dx_1^2+(nx_2^2+mx_3^2)\left[\frac{dx_2^2}{-nx_2^2+\frac{mn-k^2}{k}x_2^2+m}+\right.$$
$$\left.+\frac{dx_3^2}{-mx_3^2-\frac{mn-k^2}{k}x_3^2+n}\right];$$

cette forme est identique, à notations près, à la forme (E_5). On conclut de là que le système orthogonal, défini plus haut, est le système le plus général convenant à (E_5); il comprend aussi, on le voit facilement, les cas limites: $A=0$ ou $B=0$. Ce système est formé de deux familles de quadriques de révolution et d'une famille de plans.

Les développements de ce n⁰ nous permettent d'énoncer le théorème suivant

Théorème 7. Tous les systèmes orthogonaux et isothermes de l'espace elliptique sont définis par les formes (E_1'), (E_1''), (E_3), (E_4), (E_5).

8. Une méthode, toute semblable à celle suivie dans le n° précédent, nous permet de rechercher les systèmes orthogonaux et isothermes de l'espace hyperbolique à courbure — 1. Nous nous bornons à énoncer les résultats.

Si la courbure de la forme (A_1) du n° 2 est égale à -1, celle-ci devient, si $\alpha > -\frac{1}{2}$,

$$(H_1') \quad ds^2 = \frac{(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}{r_1} dx_1^2 + \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{r_3} dx_2^2 + \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{r_3} dx_3^2,$$

où nous avons posé

$$r_i = -4x_i^4 + mx_i^3 + nx_i^2 + px_i + q \qquad (i = 1, 2, 3),$$

m, n, p, q étant des constantes quelconques.

Désignons par y_1, y_2, y_3, y_4 $(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 1)$ les coordonnées de Weierstrass d'un point arbitraire M de l'espace hyperbolique et considérons le système de quadriques défini par l'équation

$$\frac{y_1^2}{a_1 - x} - \frac{y_2^2}{a_2 - x} - \frac{y_3^2}{a_3 - x} - \frac{y_4^2}{a_4 - x} = 0$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des constantes et x un paramètre variable. Supposons

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

En désignant par x_1, x_2, x_3 les valeurs du paramètre x correspondantes aux trois quadriques passant par le point M, on obtient pour les coordonnées de ce point les expressions suivantes

$$y_i^2 = \varepsilon_i \frac{(a_i - x_1)(a_i - x_2)(a_i - x_3)}{(a_{i+1} - a_i)(a_{i+2} - a_i)(a_{i+3} - a_i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1.$$

En calculant l'élément linéaire à l'aide de la formule $ds^2 = -dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2$, on obtient la forme (H_1'). On voit donc que les équations

$$\frac{y_1^2}{a_1 - x_i} - \frac{y_2^2}{a_2 - x_i} - \frac{y_3^2}{a_3 - x_i} - \frac{y_4^2}{a_4 - x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

définissent un système orthogonal et isotherme correspondant à la forme (H_1'), si les variables x_1, x_2, x_3 sont assujetties à rester respectivement dans les intervalles (a_2, a_3), (a_3, a_4), $(a_4, +\infty)$.

En dehors de la forme (H_1') le type (A_1) contient une seconde solution caractérisée par la formule

$$(H_1'') \quad ds^2 = \frac{dx_1^2}{-4(x_3-x_1)(x_1-x_2)} + \frac{dx_2^2}{-4(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \\ + \frac{dx_3^2}{-4(x_2-x_3)(x_3-x_1)}.$$

Le système orthogonal correspondant à cette forme est imaginaire.

En changeant légèrement les raisonnement faits dans le n° précédent, on démontre sans peine que la forme (A_2) ne peut pas être à courbure -1. Parmi les formes de la classe (A_3) existe une seule qui donne l'élément linéaire d'un espace hyperbolique; on peut l'écrire de la manière suivante

$$(H_3) \qquad ds^2 = \cos h^2 x_3 \, dx_1^2 + \sin h^2 x_3 \, dx_2^2 + dx_3^2.$$

Le changement de variables défini par les formules

$$x_1 = \psi, \quad x_2 = \varphi, \; \operatorname{tg} h x_3 = \sin \rho$$

transforme la forme (H_3) en la suivante

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{\cos^2\rho} + \operatorname{tg}^2 \rho \, d\varphi^2 + \frac{d\psi^2}{\cos^2\rho},$$

d'où l'on voit[1]) que le système orthogonal est formé d'une famille de pseudocylindres coaxiaux et de deux faisceaux de plans passant par les axes des pseudocylindres. Les surfaces de ce système sont définies, en coordonnées de Weierstrass, par les équations

$$y_2^2 + y_3^2 = \sin^2\rho(y_1^2 - y_4^2), \quad y_3 = y_2 \operatorname{tg} \varphi, \quad y_4 = y_1 \operatorname{tgh} \psi.$$

Quant à l'élément (A_4) sa courbure est égale à -1, si l'on y pose $u_3 \equiv \cosh x_3$ et si l'on choisit la fonction U_{12} de manière que la courbure de la forme $U_{12}^2(dx_1^2 + dx_2^2)$ soit égale à -1. La solution correspondante est donc caractérisée par la formule

$$(H_4) \qquad ds^2 = U_{12}^2 \cos h^2 x_3 (dx_1^2 + dx_2^2) + dx_3^2$$

et par la condition

$$\frac{\partial^2 \log U_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \log U_{12}}{\partial x_2^2} = U_{12}^2.$$

Le système orthogonal appartenant à cette solution est formée d'une famille de sphères et de deux familles de surfaces developpables.

---

[1]) G. Darboux Principes de géométrie analytique, 1917, p. 363.

Dans le cas de la forme (A_5) on trouve aussi une solution donnée par la formule suivante

$$(H_5) \qquad ds^2 = (x_2 x_3)^2 dx_1^2 + (Ax_2^2 + A'x_3^2)\left[\frac{dx_2^2}{Ax_2^4 + Bx_2^2 + A'} + \frac{dx_3^2}{A'x_3^4 - Bx_3^2 + A}\right],$$

où A, A', B sont des constantes arbitraires, l'une au moins des constantes A, A' devant être différente de zéro. Le système orthogonal correspondant à la forme (A_5) est composée d'une famille de plans et de deux familles de quadriques.

Les résultats ci-dessus peuvent être résumés dans le théorème suivant

Théorème 8. Tous les systèmes orthogonaux et isothermes de l'espace hyperbolique sont définis par les formes (H_1'), (H_1''), (H_3), (H_4), (H_5).

Eu comparant les formules (E_1'), (H_1') et la forme bien connue de l'élément linéaire de l'espace euclidien en coordonnées elliptiques, on est conduit au résultat suivant

Théorème 9. La forme quadratique

$$ds^2 = \frac{(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}{r_1} dx_1^2 + \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{r_2} dx_2^2 + \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{r_3} dx_3^2,$$

où

$$r_i = 4Kx_i^4 + mx_i^3 + nx_i^2 + px_i + q \qquad (i = 1, 2, 3),$$

est, pour toutes les valeurs des constantes K, m, n, p, q l'élément linéaire d'un espace riemannien à courbure constante K.

En supposant que la courbure riemannienne de la forme (A_5) est égale à une constaute K et en répétant, avec des légers changements, les calculs qui nous avons conduit à la forme (E_5), on peut encore ajouter la proposition suivante

Théorème 10. La forme quadratique

$$ds^2 = (x_2 x_3)^2 dx_1^2 + (Ax_2^2 + A'x_3^2)\left[\frac{dx_2^2}{-KAx_2^4 + Bx_2^2 + A'} + \frac{dx_3^2}{-KA'x_3^4 - Bx_3^2 + A}\right]$$

est, pour toutes les valeurs des constantes A, A', K, l'élément linéaire d'un espace riemannien à courbure constante K.

Un théorème sur les fonctions dérivables.

Par

T. Ważewski.

§ 1. Je me propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Soient

$$f_1(s), \dots f_n(s) \tag{1}$$

n fonctions dérivables dans un ensemble A mesurable au sens de Lebesgue. Désignons le point à n dimensios (1) par $F(s)$.

Ceci étant, il existe dans A une partie A_1 de mesure nulle, telle que l'ordre de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} f'_1(s_0), \dots, f'_n(s_0) \\ f'_1(t_0) \dots, f'_n(t_0) \end{matrix} \right\|$$

est inférieur à 2 lorsque

1°) s_0 et t_0 appartiennent à $A - A_1$,

2°) $F(s_0) = F(t_0)$ [1]).

J'indiquerai les applications de ce théorème dans un article ultérieur.

Le théorème ci-dessus résulte immédiatement du théorème plus général suivant:

Théorème II. Soient

$$f_1(s), \dots, f_n(s) \tag{1}$$

$$g_1(t), \dots, g_n(t) \tag{2}$$

$2n$ fonctions dérivables respectivement dans les ensembles mesura-

---

[1]) C'est une vaste généralisation d'un théorème que j'ai démontré par une méthode tout à fait différente dans mon mémoire polonais concernant les continus rectifiables. (Dodatek do Rocznika Polsk. Tow. Mat. T. III. p. 38). Le présent théorème fait partie de ceux que j'ai présentés au cours du 1-er Congrès Polon. de Math. (Lwów, Septembre 1927).

bles A et B. Désignons par $F(s)$ et $G(t)$ les points à n dimensions (1) et (2).

Ceci étant, il existe dans A et B deux sousensembles de mesure nulle A_1 et B_1, tels que l'ordre de la matrice

$$\text{(M)} \qquad \left\| \begin{matrix} f_1'(s_0), \ldots, & f_n'(s_0) \\ g_1'(t_0), \ldots, & g_n'(t_0) \end{matrix} \right\|$$

est inférieur à 2 lorsque

1°) s_0 et t_0 appartiennent respectivement à $A - A_1$ et $B - B_1$,

2°) $F(s_0) = G(t_0)$.

§ 2. Je vais prouver maintenant qu'on peut ramener ce théorème à un théorème plus particulier que nous citerons comme „théorème II bis". C'est le théorème II auquel on a ajouté les deux prémisses nouvelles suivantes:

$$(\mathrm{H}_1) \qquad A \text{ et } B \text{ sont bornés,}$$

$$(\mathrm{H}_2) \qquad f_1'(s) \neq 0, \quad g_1'(t) \neq 0 \text{ lorsque } s \in A, \quad t \in B$$ [1]).

En effet, si H_1 n'avait pas lieu, il n'y aurait qu'à introduire les variables indépendantes σ et τ : $\sigma = \operatorname{arc\,tg} s$, $\tau = \operatorname{arc\,tg} t$. Dans la suite nous supposons que H_1 a lieu.

Pour démontrer la possibilité de se borner au cas de la réstriction H_2, remarquons d'abord qu'il suffit de prouver le théorème II dans le cas où

$$(1) \qquad \Sigma f_\nu'(s)^2 > 0, \quad \Sigma g_\nu'(t)^2 > 0 \quad \text{lorsque} \quad s \in A, \quad t \in B.$$

Désignons en effet par C et D les ensembles où respectivement $\Sigma f_\nu'(s)^2$, $\Sigma g_\nu'(t)^2$ sont nuls. Les fonctions $f_\nu'(s)$ et $g_\nu'(t)$ étant mesurables [2]), les ensembles C et D le sont aussi. Si soit $s_0 \in C$, soit $t_0 \in D$, la matrice (M) est d'ordre < 2. Il suffit donc de démontrer le théorème relatif aux ensembles mesurables $A - C$, $B - D$ pour lesquels $\Sigma f_\nu'(s)^2 > 0$, $\Sigma g_\nu'(t)^2 > 0$.

Nous supposons dorénavant que (1) a lieu.

Soit $\| a_{\mu,\nu} \|$ un déterminant non nul d'ordre n. Posons

$$\varphi_\mu(s) = \sum_{\nu/1}^{n} a_{\mu\nu} f_\nu(s), \quad \psi_\mu(t) = \sum_{\nu/1}^{n} a_{\mu\nu} g_\nu(t). \qquad (\mu/1, \ldots n).$$

Si nous démontrons le théorème II relativement aux fonctions

---

[1]) $s \in A$ veut dire que s appartient à A.

[2]) Cf. S. Banach. Sur les dérivées des fonctions mesurables, Fundamenta Mathematicae T. III. p. 128.

$\varphi_\mu(s)$ et $\psi_\mu(t)$ et aux ensembles A et B, il en résultera facilement le théorème relatif aux $f_\nu(s)$ et $g_\nu(t)$ et aux mêmes ensembles. Or, nous allons prouver qu'il existe un déterminant en question, tel que l'on ait presque partout respectivement sur A et sur B $\varphi_1'(s) \neq 0$, $\psi_1'(t) \neq 0$. Les ensembles exceptionnels de mesure nulle étant sans importance pour le théorème II, la possibilité de se borner au cas de la restriction (H_2) sera ainsi démontrée.

Nous déduirons l'existence du déterminant en question du lemme suivant:

Lemme. S étant un ensemble mesurable et borné; $\lambda_1(\sigma),\ldots, \lambda_n(\sigma)$ étant définies dans S, mesurables et telles que partout dans S

$$\Sigma[\lambda_\nu(\sigma)]^2 > 0, \tag{2}$$

il existe une suite de nombres $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ qui ne sont pas tous nuls et tels qu'on a presque partout dans S

$$\Sigma\alpha\ \lambda_\nu(\sigma) \neq 0. \tag{3}$$

Démonstration. Le cas de $n=1$ est banal. Dans le cas de $n=2$, il suffit de démontrer l'existence d'un nombre k, tel qu'on ait presque partout dans S

$$\lambda_1(\sigma) + k\lambda_2(\sigma) \neq 0, \tag{4}$$

k étant un nombre réel quelconque, désignons par E_k la classe des points de S pour lesquels

$$\lambda_1(\sigma) + k\lambda_2(\sigma) = 0.$$

E_k est mesurable On a $E_{k_1} . E_{k_2} = 0$ lorsque $k_1 \neq k_2$ [1]). En effet, dans le cas contraire, il existerait dans S un σ_1 pour lequel on aurait

$$\lambda_1(\sigma_1) + k_1\ \lambda_2(\sigma_1) = 0$$
$$\lambda_1(\sigma_1) + k_2\ \lambda_2(\sigma_1) = 0$$

ce qui est impossible en vertu de (2) et de l'hypothèse $k_1 \neq k_2$.

La classe des k pour lesquels E_k a une mesure positive est tout au plus dénombrable, car A ne peut renfermer qu'une classe tout au plus dénombrable d'ensembles disjoints et ayant une mesure positive.

Il existe donc un k, tel que E_k est de mesure nulle

Pour ce k l'inégalité (4) subsiste presque partout dans S.

---

[1]) Nous désignons par $A.B$ la classe des points communs à A et B, par 0 la classe vide.

Supposons que le lemme soit vrai pour n et examinons le cas de $n+1$.

Divisons S en deux ensembles mesurables et disjoints S_1 et S_2 pour lesquels on a respectivement

$$\sum_{\nu/2}^{n+1}\{\lambda_\nu(\sigma)\}^2=0, \quad \sum_{\nu/2}^{n+1}\{\lambda_\nu(\sigma)\}^2>0.$$

Il existe une suite de nombres $\beta_2,\ldots,\beta_n$ pour laquelle on a presque partout dans S_2

$$\sum_{\nu/2}^{n+1}\beta_\nu\lambda_\nu(\sigma)\neq 0.$$

On a partout dans S_1 (Cf. (2)) $\lambda_1(\sigma)\neq 0$. Posons $\omega_1(\sigma)=$ $=\lambda_1(\sigma)$; $\omega_2(\sigma)=\sum_{n/2}^{n}\beta_\nu\lambda_\nu(\sigma)$, ω_1 et ω_2 sont mesurables et on a presque partout dans $S=S_1+S_2$

$$\{\omega_1(\sigma)\}^2+\{\omega_2(\sigma)\}^2>0.$$

En se servant du cas de $n=2$, on prouve facilement l'existence d'un k, tel que presque partout dans A

$$\omega_1(\sigma)+k\omega_2(\sigma)\neq 0$$

Il suffit de poser $\alpha_1=1$, $\alpha_\nu=k\beta_\nu$ $(\nu/2,\ldots, n+1)$ pour conclure à la vérité du lemme, dans le cas de $n+1$.

Le lemme étant établi, enfermons $A+B$ dans un intervalle ouvert $(-m, m)$ $(0<m<+\infty)$. Posons

$$\lambda_\nu(\sigma)=f_\nu(\sigma) \quad \text{lorsque} \quad \sigma\in A,$$
$$\lambda_\nu(\sigma)=g_\nu(\sigma-2m) \quad \text{lorsque} \quad (\sigma-2m)\in B.$$

On a

$$\lambda'_\nu(\sigma)=f'_\nu(\sigma) \quad \text{lorsque} \quad \sigma\in A,$$
$$\lambda'_\nu(\sigma)=g'_\nu(\sigma-2m) \quad \text{lorsque} \quad (\sigma-2m)\in B.$$

L'ensemble S des σ où les fonctions $\lambda_\nu(\sigma)$ sont définies est mesurable et borné.

Les fonctions $\lambda'_\nu(\sigma)$ sont mesurables, car les fonctions $f'_\nu(\sigma)$ et $g'_\nu(\sigma-2m)$ le sont.

On a, d'après (1), presque partout dans S

$$\sum\lambda'_\nu(\sigma)^2>0.$$

Il existe donc une suite de nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, telle qu'on a presque partout dans S

$$\sum\alpha_\nu\lambda'_\nu(\sigma)\neq 0.$$

Or, il existe un déterminant non nul d'ordre n $\| a_{\mu,\nu} \|$ pour lequel

$$a_{1,\nu} = \alpha_\nu. \qquad (\nu/1, \ldots n)$$

En posant

$$\varphi_\mu(s) = \sum_{\nu/1}^{n} a_{\mu\nu} f_\nu(s), \quad \psi_\mu(t) = \sum_{\nu/1}^{n} a_{\mu\nu} g_\nu(t),$$

on voit facilement que presque partout dans A et B on a respectivement

$$\varphi_1'(s) \neq 0, \quad \psi_1'(t) \neq 0.$$

La possibilité de se borner au cas de l'hypothèse (H_2) est ainsi démontrée.

C'est bien le théorème II bis qu'il suffit de prouver.

§ 3. Afin de mettre en évidence la raison qui nous a conduit aux considérations de ce paragraphe, observons que la fonction inverse d'une fonction $\varphi(x)$ continue et monotone (au sens strict) n'est pas forcément continue. Elle l'est, si l'ensemble A composé des points où elle est définie est bilatéralement dense en lui-même, c. à. d., si tout point x de A est à la fois point d'accumulation de la partie de A située à droite de x et de celle qui se trouve à sa gauche.

Observons ensuite qu'un ensemble dense en lui-même peut cesser de l'être, si l'on en enlève un sousensemble dénombrable.

Or, il se manifestera, dans la suite, la nécessité d'envisager des fonctions qui sont monotones et continues en même temps que leurs fonctions inverses. Il va aussi surgir le besoin de ne les considérer que dans les ensembles des x qui ne cessent d'être denses en eux-mêmes, même si l'on y supprime une partie dénombrable.

Voici quelques définitions et propositions qui vont nous servir dans la suite.

I. Définition. Nous appelons un point x de A point de condensation bilatérale par rapport à A, si, δ étant un nombre positif quelconque, chacun des intervalles $(x - \delta, x)$, $(x, x + \delta)$ renferme une partie non dénombrable de A.

II. Définition. Nous appelons un ensemble A ensemble à condensation bilatérale, lorsque tout point de A est point de condensation bilatérale par rapport à A.

III. Un ensemble A étant à condensation bilatérale, il continue de l'être lorsqu'on y supprime une partie dénombrable [1]) quelconque.

---

[1]) Il nous sera commode d'appeler, pour le moment, dénombrable toute classe vide, finie ou dénombrable au sens propre.

IV. Tout ensemble à condensation bilatérale est bilatéralement dense en lui-même.

V. A étant un ensemble quelconque, on peut y supprimer une partie dénombrable de façon que l'ensemble qui reste soit à condensation bilatérale.

Désignons, en effet, par A_1 l'ensemble de tous les points de A qui sont ses points de condensation. $B_1 = A - A_1$ est dénombrable.

Désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ la suite de tous les intervalles contigus à $\overline{A}_1$ [1]. On démontre facilement que la classe B_2 des points de A_1, qui sont des points de condensation unilatérale par rapport à A_1, est contenue dans la classe des extrêmités des intervalles Δ_ν et qu'elle est, par conséquent, dénombrable.

L'ensemble $A - (B_1 + B_2)$ est à condensation bilatérale.

VI. Définition. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x)$ jouit de la proprieté (α) par rapport à un ensemble A et nous ecrirons $\varphi/_\alpha A$, si

1º) φ admet une fonction inverse, c. à. d. $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ lorsque $x_1 \neq x_2$ et x_1 et x_2 appartiennent à A,

2º) les ensembles A et $\varphi(A)$ [2] sont à condensation bilatérale.

VII. Si $\varphi/_\alpha A$ et que D est une partie dénombrable de A, alors $\varphi/_\alpha (A - D)$ (Cf. III et VI).

VIII. Si $\varphi/_\alpha A$, alors $\varphi^{-1}/_\alpha \varphi(A)$ [3].

IX. Si φ admet une fonction inverse et est définie dans A, il existe une partie dénombrable D de A, telle que

$$(1) \qquad \varphi/_\alpha (A - D).$$

Il existe en effet dans A une partie dénombrable, telle que $A - D_1$ est à condensation bilatérale (Cf. V). Dans $\varphi(A - D_1)$ il existe aussi une partie dénombrable D_2, telle que $\varphi(A - D_1) - D_2$ est à condensation bilatérale. Il suffit de poser $D = D_1 + \varphi^{-1}(D_2)$ pour réaliser la relation (1). (Cf. III).

X. Si $\varphi(x)$ est une fonction monotone au sens strict et continue dans A, si $\varphi/_\alpha A$ et si pour les points σ_0 et σ_ν $(\nu/1, 2, \ldots)$ appartenant à A on a $\lim \varphi(\sigma_\nu) = \varphi(\sigma_0)$, alors $\lim \sigma_\nu = \sigma_0$.

---

[1]) $\overline{C}$ désigne l'énsemble C augmenté de la totalité des points d'accumulations de C.

[2]) $\varphi(A)$ désigne l'image de A par l'intermédiaire de $\varphi(x)$.

[3]) $\varphi^{-1}(u)$ désigne la fonction inverse de la fonction φ.

Pour le démontrer il n'y a qu'à remarquer que A est bilatéralement dense en lui-même, lorsque les prémisses du théorème sont vérifiées.

§ 4. Nous allons démontrer le théorème II bis (§ 2) dans le cas où $f_1(s)$ et $g_1(t)$ sont monotones au sens strict respectivement dans A et B.

Désignons par P la classe de tous les points (s, t) qui satisfont à l'équation

(1) $$F(s) = G(t).$$

P est un ensemble situé sur un plan rapporté aux axes rectangulaires s et t. Nous affirmons que toute droite parallèle à l'axe s (ou à l'axe t) renferme tout au plus un point de P.

Soient, en effet, (s_0, t_1), (s_0, t_2) deux points de P situés sur la droite $s = s_0$. On a $G(t_1) = F(s_0) = G(t_2)$ et, par conséquent, $g_1(t_1) = g_1(t_2)$. $g_1(t)$ étant monotone on en déduit $t_1 = t_2$. Les deux points en question sont donc identiques.

Ceci étant établi, il existe une fonction $\beta(s)$ admettant une fonction inverse et ayant P pour image plane.

L'équation

$$t = \beta(s)$$

est évidemment équivalente à l'équation (1).

Soient S et T les projections de P respectivement sur les axes s et t. On a évidemment:

(Ω) Si $F(s) = G(t)$, alors $s \in S$, $t \in T$, $t = \beta(s)$ et inversement.

Il est manifeste que

(2) $$S \subset A, \quad T \subset B.\text{[1]}$$

Il existe (Cf. § 3. IX) une partie dénombrable S_1 de S, telle que

(3) $$f_1/_a\, S - S_1.$$

Posons $T_1 = \beta(S_1)$. Il existe un sousensemble dénombrable T_2 de $T - T_1$ pour lequel

(4) $$g_1/_a\, T - T_1 - T_2.$$

Soit $S_2 = \beta^{-1}(T_2)$.

On a d'après (3) et § 3. VII

(5) $$f_1/_a\, S - S_1 - S_2.$$

---

[1]) $S \subset A$ veut dire que S est une partie de A.

La fonction $\beta(s)$ admettant une fonction inverse, il est clair que

(6) $$\beta(S - S_1 - S_2) = T - T_1 - T_2.$$

Posons $A_1 = S_1 + S_2$, $B_1 = T_1 + T_2$ et supposons que

(7) $$s_0 \in A - A_1, \quad t_0 \in B - B_1, \quad F(s_0) = G(t_0).$$

Il en résulte (Cf. (Ω) et (6))

(8) $$s_0 \in S - S_1 - S_2, \quad t_0 \in T - T_1 - T_2, \quad f_1(s_0) = g_1(t_0).$$

$S - S_1 - S_2$ étant dense en lui-même (Cf. (5), § 3, VI, IV), il existe une suite de points s_ν, telle que

(9) $$s_\nu \in S - S_1 - S_2, \quad s_\nu \neq s_0, \quad \lim s_\nu = s_0$$

$f_1(s_\nu)$ étant définie pour tous les ν (Cf. (2) et (9)), continue et monotone, on obtient de (9)

(10) $$f_1(s_\nu) \neq f_1(s_0), \quad \lim f(s_\nu) = f(s_0).$$

Posons $t_\nu = \beta(s_\nu)$. On a (Cf. (6), (Ω) et (9))

(11) $$t_\nu \in T - T_1 - T_2, \quad t_\nu \neq t_0, \quad F(s_\nu) = G(t_\nu)$$

et à plus forte raison

(12) $$f_1(s_\nu) = g_1(t_\nu).$$

De là il s'ensuit d'après (10) et (8)

(13) $$g_1(t_\nu) \neq g_1(t_0), \quad \lim g_1(t_\nu) = g_1(t_0).$$

La fonction $g_1(t)$ étant continue et monotone on obtient de (4), (8), (11), (13) en vertu du théorème X § 3

$$\lim t_\nu = t_0.$$

On a (Cf. (12), (8), (13)

$$\frac{t_\nu - t_0}{s_\nu - s_0} = \frac{f_1(s_\nu) - f_1(s_0)}{s_\nu - s_0} : \frac{g_1(t_\nu) - g_1(t_0)}{t_\nu - t_0}$$

et à la limite

$$\lim \frac{t_\nu - t_0}{s_\nu - s_0} = \frac{f_1'(s_0)}{g_1'(t_0)},$$

car $g_1'(t_0) \neq 0$ (Cf. § 2. H_2).

Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. On a (Cf. (11), (7)):

$$\frac{f_i(s_\nu)-f_i(s_0)}{s_\nu-s_0}=\frac{g_i(t_\nu)-g_i(t_0)}{t_\nu-t_0}\cdot\frac{t_\nu-t_0}{s_\nu-s_0}$$

d'où il résulte:

$$f_i'(s_0)=g_i'(t_0)\frac{f_1'(s_0)}{g_1'(t_0)}\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

et par conséquent la matrice (M) du § 1 est d'ordre inférieur à deux.

Il suffit de remarquer que les ensembles A_1 et B_1 sont de mesure nulle (ils sont dénombrables) pour conclure à la vérité du théorème II bis dans le cas envisagé.

§ 5. Pour démontrer le théorème II bis dans toute sa généralité nous nous servirons d'un théorème de M. Kintchine que nous citons dans l'énoncé suivant [1]):

C étant un ensemble mesurable, $\varphi(s)$ une fonction possédant presque partout dans C une dérivée non nulle, il existe une suite de sousensembles C^i de C mesurables et disjoints, telle que

1°) $\varphi(s)$ considérée sur C^i soit monotone,

2°) l'ensemble $C^* = C - \Sigma C^i$ soit de mesure nulle.

Admettons que les prémisses du théorème II bis sont vérifiées. Il existe, en vertu du théorème précité, deux suites d'ensembles mesurables A^λ et B^λ, telles que

α) $f_1(s)$ est monotone dans A^λ et $g_1(t)$ dans B^λ,

β) $A^\lambda \subset A$, $B^\lambda \subset B$,

γ) les ensembles $A^* = A - \Sigma A^\lambda$, $B^* = B - \Sigma B^\lambda$ sont de mesure nulle.

D'après le résultat du paragraphe précédent, il existe deux ensembles de mesure nulle A^λ_μ et B^μ_λ contenus respectivement dans A^λ et B^μ et tels que l'ordre de la matrice M (§ 1) est inférieur à deux, lorsque

$$s_0 \in A^\lambda - A^\lambda_\mu,\quad t_0 \in B^\mu - B^\mu_\lambda,\quad F(s_0)=G(t_0).$$

Posons $A_1 = A^* + \Sigma\Sigma A^\lambda_\mu$. $B_1 = B^* + \Sigma\Sigma B^\mu_\lambda$

---

[1]) J'ai démontré, indépendemment de M. Kintchine, un théorème, moins général par une méthode différente (l. c. p. 20). J'ai appris, grâce aux renseignements obligeants obtenus auprès des mathématitiens russes participant au Congrès de Lwów, que ma méthode de généralisation coïncidait, en principe, avec la méthode de M. Kintchine exposée dans un volume du Matématitcheski Sbornik dont ils n'ont pas su me communiquer le numéro.

A_1 et B_1 sont de mesure nulle. On a d'autre part

(1) $$\begin{cases} A - A_1 \subset \Sigma A^\lambda - \Sigma\Sigma A^\lambda_\mu \\ B - B_1 \subset \Sigma B^\mu - \Sigma\Sigma B^\mu_\lambda \end{cases}$$

Supposons que

(2) $$s_0 \in A - A_1, \quad t_0 \in B - B_1, \quad F(s_0) = G(t_0).$$

D'après les relations (1), il existe deux indices λ et μ, tels que

$$s_0 \in A^\lambda - A^\lambda_\mu, \quad t_0 \in B^\mu - B^\mu_\lambda$$

et ceci implique, d'après la dernière des relations (2), que la matrice (M) est d'ordre inférieur à deux.

Le théorème II bis est ainsi démontré.

Sur la loi de probabilité de l'écart maximum.

Par

Maurice Fréchet.

(Université de Strasbourg).

Table des matières.

1. Introduction. En étudiant les récents travaux sur la théorie des erreurs d'observation, les doutes que m'avait laissée l'exposition classique de cette théorie, se sont réveillés. J'avais eu l'occasion de préciser quelques objections lors d'une conférence que j'avais eu l'honneur de faire au Colloque Mathématique de Berne, en 1922. De nouvelles objections me sont venues à l'esprit que je compte exposer dans un autre Recueil. L'une d'elles utilise certain résultats mathématiques que j'ai cru préférable d'exposer séparément. Ce sont ceux qui forment l'objet du présent travail.

Celui-ci peut avoir son intérêt propre. On trouvera peut-être curieux qu'on puisse, comme nous l'avons fait ici, calquer entièrement une théorie de la loi de probabilité de l'écart maximum sur la théorie de la loi de probabilité de la somme de plusieurs erreurs,

telle que cette dernière a été développée par M. Paul Lévy dans son ouvrage si suggestif intitulé Calcul des Probabilités (Gauthier-Villars, Paris, 1925, pages 135—251). Il est encore plus curieux de voir que dans la théorie que nous présentons, le rôle de l'intégrale de Laplace $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ soit tenu par la fonction entièrement différente $2^{-x^{-\alpha}}$ (où α est une constante positive arbitraire; on pourrait aussi remplacer 2 par un nombre positif quelconque).

Mais le lecteur voudra bien ne pas oublier que le but de ce mémoire n'est pas tant d'établir les résultats précis qu'il contient que de constituer le point de départ d'une nouvelle critique de la théorie des erreurs d'observation. Comme je l'ai dit plus haut, cette critique paraîtra ailleurs [1]). Ceux qui n'en reconnaîtraient pas le bien fondé pourront peut-être cependant s'intéresser aux développements qui suivent.

I. Variables aléatoires en nombre fini.

2. Composition des lois de probabilités des erreurs partielles. Le premier problème que nous nous proposons de résoudre est de déterminer la loi de probabilité de ε connaissant les lois de probabilités des variables indépendantes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, lorsque $|\varepsilon|$ est la plus grande des quantités $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|$.

Pour simplifier la question et éviter une difficulté de signe d'ordre secondaire, nous nous bornerons à faire intervenir les lois de probabilité des „écarts" $|\varepsilon|$, $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|$ et non des erreurs ellesmêmes $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Considérons d'abord les cas de deux variables seulement et posons $z = |\varepsilon|$, $x = |\varepsilon_1|$, $y = |\varepsilon_n|$. Désignons par $F(X)$, $G(Y)$, $H(Z)$, les „fonctions de probabilités totales" de x, y, z, c'est à dire les probabilités respectives pour que $x < X$, $y < Y$, $z < Z$. Le théorème des probabilités composées fournit immédiatement la formule fondamentale

$$H(Z) = F(Z) \,.\, G(Z)$$

analogue à celle qui lie les fonctions caractéristiques au sens de Cauchy [2]) dans l'hypothèse de l'additivité des erreurs.

---

[1]) Bull. des Sc. Mathém., vol. 52, 19 8.

[2]) Voir Paul Lévy, loc. cit. pages 161, 184, formule (49).

Plus généralement, considérons le cas de n variables indépendantes et soit $F_i(X_i)$ la probabilité que $|\varepsilon_i| < X_i$, $H(Z)$, la probabilité que $|\varepsilon| < Z$ et $|\varepsilon|$ le plus grand des écarts $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|$.

On aura en appliquant encore le théorème des probabilités composées

$$(3) \qquad H(Z) = F_1(X_1) \ldots F_n(X_n).$$

3. Recherches d'une forme de loi stable dans la composition. Supposons que deux variables x_1, x_2 suivent à l'ordre de grandeur. près la même loi F de probabilités. Cela voudra dire que les „fonctions de probabilités totales“ de x_1 et de x_2 sont de la forme

$$F_1(x_1) = F\left(\frac{x_1}{A_1}\right), \quad F_2(x_2) = F\left(\frac{x_2}{A_2}\right)$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes positives proportionnelles aux ordres de grandeur respectifs des variables x_1 et x_2.

Cherchons s'il est possible de déterminer la fonction F de façon que la forme F de la loi de probabilité soit „stable“ dans la „composition“ des écarts, c'est à dire d'une façon précise qu'en posant

$$(3) \qquad H(Z) = F\left(\frac{Z}{A_1}\right) \ldots F\left(\frac{Z}{A_n}\right),$$

il existe une constante positive A ne dépendant que des constantes arbitraires $A_1, \ldots, A_n$ et telle que

$$(4) \qquad H(Z) = F\left(\frac{Z}{A}\right).$$

Si cette condition est satisfaite par une fonction F pour $n = 2$, elle sera évidemment satisfaite par la même fonction pour tout entier n. Ecrivons donc

$$(5) \qquad F\left(\frac{Z}{C}\right) = F\left(\frac{Z}{A}\right) . F\left(\frac{Z}{B}\right), \qquad (6) \quad C = \lambda(A, B).$$

Il s'agit donc de résoudre ce système d'équations fonctionnelles, où les inconnues sont les fonction F et λ, $F(Z)$ étant la probabilité pour qu'une certaine variable z soit comprise entre 0 et Z, varie sans décroître de 0 à 1 quand z croît de 0 à $+\infty$. Nous nous contenterons de chercher les solutions F qui sont continues et par conséquent croîssantes. Alôrs, comme on a d'après (5)

$$(5)' \qquad \log F\left(\frac{1}{C}\right) = \log F\left(\frac{1}{A}\right) + \log F\left(\frac{1}{B}\right);$$

on est amené à résoudre d'abord l'équation en A

$$(7) \qquad -\log F\left(\frac{1}{A}\right) = a$$

où grâce au signe — la quantité a sera positive. Puisque F croit de 0 à 1 quand A décroit de $+\infty$ à 0, a décroitra alors de $+\infty$ à 0 et cette équation (7) aura une seule racine

$$(7)' \qquad A = \theta(a).$$

On a d'après (5)' et (7)

$$c = a + b$$

les notations étant évidentes et par suite $C = \theta(a+b)$, d'où, en portant dans (5),

$$-\log F\left(\frac{Z}{\theta(a+b)}\right) = -\log F\left(\frac{Z}{\theta(a)}\right) - \log F\left(\frac{Z}{\theta(b)}\right).$$

Pour chaque valeur particulière de Z, la fonction $-\log F\left(\frac{Z}{\theta(a)}\right)$ est donc une fonction additive de a et puisqu'elle est continue, on sait d'après Cauchy qu'elle est proportionnelle à a [1]). On a donc

$$-\log F\left(\frac{Z}{\theta(a)}\right) = a\,\varphi(Z),$$

$\varphi(Z)$ étant une certaine fonction positive de Z [2]), d'où:

$$\log F\left(\frac{Z}{A}\right) = \varphi(Z) \log F\left(\frac{1}{A}\right).$$

On obtient la fonction C en faisant $A=1$, [2]) d'où:

$$(8) \qquad \varphi(Z) = -h \log F(Z)$$

h étant une constante positive indépendante de Z et A.

Et par suite

$$(9) \qquad \varphi\left(\frac{Z}{A}\right) = \varphi(Z)\,\varphi\left(\frac{1}{A}\right).$$

---

[1]) On sait qu'il en serait encore de même si cette fonction était simplement supposée mesurable au sens de M. Lebesgue. Voir, par exemple, M. Fréchet, Pri la funkcia ekvacio $f(x+y)=f(x)+f(y)$, Enseignement mathématique 15ᵉ année, 1913, p. 390—393.

[2]) Nous supposons que pour Z fini et positif — ou au moins pour $Z=1$, — on a $0 < F(Z) < 1$.

Posons, puisque A et Z sont positifs

$$Z = e^{\zeta}, \qquad \frac{1}{A} = e^{u}, \qquad \log \varphi(e^{\zeta}) = \Psi(\zeta).$$

L'équation (8) deviendra

$$\Psi(\zeta + u) = \Psi(\zeta) + \Psi(u).$$

Nous voyons encore que $\Psi(\zeta)$ est proportionnelle à ζ, soit $\Psi(\zeta) = k\zeta$, d'où

$$-h \log F(Z) = \varphi(Z) = Z^{k}$$

d'où

$$F(Z) = e^{-\frac{Z^{k}}{h}}.$$

Comme $F(Z)$ tend vers 1 lorsque Z tend vers $+\infty$, k est une constante négative que nous pourrons appeler $-\alpha$, de sorte que

(9) $$F(Z) = e^{-\frac{Z^{-\alpha}}{h}} \qquad (h > 0,\ \alpha > 0).$$

Nous avons posé

$$F_1(X_1) = F\left(\frac{X_1}{A_1}\right)$$

A_1 étant proportionnel à l'ordre de grandeur de X_1. Si A'_1 est l'écart probable ou médian de X_1 (avec zéro), c'est à dire si $F)_1 A'_1) = \frac{1}{2}$, on a

$$A'_1 = A_1 (h \log 2)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

de sorte que A'_1 est aussi proportionnel á l'ordre de grandeur de X_1. On peut donc supposer qu'on a pris pour A_1 l'écart médian de X_1 et alors on aura $h \log 2 = 1$, d'où finalement

(10) $$F(Z) + 2^{-Z^{-\alpha}}, \qquad (\alpha > 0) \text{ et}$$

(11) $$F_1(X_1) = 2^{-A_1^{\alpha} X_1^{-\alpha}},$$

A_1 désignant l'écart médian de la variable X_1.

S'il y a une solution en F, nous l'avons trouvée. Inversement, la formule (3) donne

$$\log H(Z) = -(A_1^{\alpha} Z^{-\alpha} + \ldots + A_n^{\alpha} Z^{-\alpha}) \log 2$$

d'où

$$H(Z) = F\left(\frac{Z}{A}\right)$$

en posant

(13) $$A^{\alpha} = A_1^{\alpha} + \ldots + A_n^{\alpha}$$

expression qni est bien indépendante de Z.

Ceci nous montre bien que la solution trouvée convient et nous donne en même temps l'expression de la fonction λ de la formule (6) [1]).

Nous pouvons appeler *valeur réduite* de la variable le quotient de la valeur de cette variable par son écart médian. Et $F(Z) = 2^{-Z^{-\alpha}}$ sera „la forme réduite" de la fonction de probabilité totale $F_1(X_1) = 2^{-A_1^{\alpha} X_1^{-\alpha}}$.

Si les erreurs partielles suivent à l'ordre de grandeur près la même loi de probabilité et si la forme réduite de la loi des écarts partiels est $F(Z) = 2^{-Z^{-\alpha}}$ (où α est une constante positive arbitraire mais déterminée), alors l'écart final suit aussi à l'ordre de grandeur près la même loi de probabilité et la puissance α de son écart médian est égal à la somme des puissances α des écarts médians des écarts partiels.

Ainsi, en un sens provisoirement étroit, nous avons démontré que la fonction $F(Z) = 2^{-Z^{-\alpha}}$ est la forme réduite d'une loi de probabilité totale d'un écart, qui est *stable par rapport au mode de composition des erreurs partielles* dans lequel l'écart résultant est le plus grand des écarts composants.

4. Définition de la classe C_{α} de lois de probabilité. Nons allons maintenant accroître la généralité du résultant précédent en donnant au mot stable un sens plus étendu.

Nous avons vu qu'on a pour la loi qu'on vient d'obtenir

$$F_1(X_1) = 2^{-A_1^{\alpha} X_1^{-\alpha}}$$

ou $$\log F_1(X_1) = - A_1^{\alpha} X_1^{-\alpha} \log 2.$$

Par suite

$$\lim_{X_1 \to +\infty} - X_1^{\alpha} \log F_1(X_1) = A_1^{\alpha} \log 2$$

on, ce qui revient au même puisque $F_1(X_1) \to 1$ quand $X_1 \to +\infty$:

(14) $$\lim_{X_1 \to +\infty} X_1^{\alpha} \{1 - F_1(X_1)\} = A_1^{\alpha} \log 2$$

---

[1]) On pourra comparer la démonstration, qui vient d'être donnée, de la résolution des équations fonctionnelles (5), (6) à celles (basées sur des restrictions ou sur une méthode différente) qu'on trouvera à la page 254 de l'ouvrage de M. Paul Lévy, (loc. cit.).

et par suite

$$\lim_{X_1 \to +\infty} X_1^\alpha \{1 - F_1(X_1)\} = \text{quantité finie positive.}$$

Autrement dit, lorsque X_1 est très grand $1 - F_1(X_1)$ est une quantité infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{X_1^\alpha}$.

Les lois que nous venons de déterminer ne sont pas les seules qui satisfassent à cette dernière condition. Pour toute loi de probabilité totale $G(X)$, $1 - G(X)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{X}$. Pour certaines d'entre elles, $1 - G(X)$ est un infiniment petit comparable à une puissance (nécessairement positive) de $\frac{1}{X}$. Quand cela a lieu pour l'une de ces lois, cette puissance est déterminée. Appelons C_α la classe des lois de probabilité totale $G(X)$ telles que $1 - G(X)$ soit un infiniment petit de l'ordre α, c'est à dire telles que

(15) $$\lim_{X \to \infty} X^\alpha [1 - G(X)] = \text{quantité finie positive}$$

ou ce qui revient au même

(16) $$\lim_{X \to \infty} X[-\log G(X)]^{1/\alpha} = \text{quantité finie positive.}$$

5. Stabilité de la classe C_α. La classe C_α est „fermée" par rapport à la composition des probabilités considérée précédemment. Autrement dit, si l'on pose

$$H(Z) = F_1(Z)\, F_2(Z) \ldots F_n(Z)$$

et par suite

(17) $$- Z^\alpha \log H(Z) = - Z^\alpha \log F_1(Z) - \ldots - Z^\alpha \log F_n(Z).$$

il est clair que si chacun des produits du second membre a une limite finie positive quand Z tend vers $+\infty$, il en sera même du premier membre

Ainsi, sans dire que chacune des lois de C_α est stable, on peut dire que *la classe C_α de lois de probabilités des erreurs est stable (dans la composition des écarts partiels en un écart final égal au plus grand des écarts partiels).*

Cette classe C_α comprend comme cas particulier l'ensemble plus étroit c_α des lois de probabilité $F(X)$ (considérées plus haut) qui se peuvent définir par la relation plus restrictive

(18) $$X[-\log F(X)]^{1/\alpha} = \text{constante.}$$

6. Ecart typique. Pour spécifier la forme des lois de C_α, remarquons qu'on peut pour chacune d'elle, $G_1(X_1)$, définir un nombre A_1 par la même forme de relation qui permet de calculer au moyen de (14) l'écart probable d'une variable soumise à une loi „du type c_α". Le nombre A_1 défini par la relation

$$(19) \qquad \lim_{X_1 \to +\infty} X_1 \{1 - G_1(X_1)\}^{1/\alpha} = A_1 (\log 2)^{1/\alpha}$$

n'est plus un écart probable. Mais il joue encore le rôle essentiel de mesurer l'ordre de grandeur de la variable X_1. Si en effet une variable X est soumise à la même loi de probabilité que X_1, à l'ordre de grandeur près, c'est à dire à une loi de probabilité totale de la forme $G(X) = G_1(aX)$ où a est le rapport des ordres de grandeurs de X_1 et de X, on aura

$$\lim_{X \to +\infty} X\{1 - G(X)\}^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{a} \lim_{aX \to +\infty} aX\{1 - G_1(aX)\}^{\frac{1}{\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{a} \lim_{X_1 \to +\infty} X_1 \{1 - G_1(X_1)\}^{1/\alpha} = \frac{A_1}{a}.$$

Donc $G(X)$ est d'abord de la même classe C_α que $G_1(X_1)$ et la quantité définie par le premier membre est bien proportionnelle à l'ordre de grandeur de la variable X. Nous pouvons donc appeler la quantité A definie par la relation

$$(20) \qquad A(\log 2)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{X \to +\infty} X\{1 - G(X)\}^{1/\alpha},$$

l'écart typique de la variable X lorsque sa loi de probabilité $G(X)$ appartient à la classe C_α.

Notons en passánt que pour une telle variable X, les „moments"

$$\int_0^{+\infty} X^\beta \, dG(X)$$

d'ordre $\beta < \alpha$ sont finis alors que le moment d'ordre α est infini. Cela résulte de l'égalité

$$\lim_{X \to +\infty} X^{\beta - \alpha}[X^\alpha\{1 - G(X)\}] = \int_0^{+\infty} dX^\beta \{1 - G(X)\} =$$
$$- \int^{+\infty} X^\beta \, dG(X) + \int^{+\infty} [X^\alpha \{1 - G(X)\}] \frac{\beta}{\beta - \alpha} dX^{\beta - \alpha}$$
$$+ \text{constante}$$

valable pour $0 < \beta < \alpha$, et de l'égalité

$$Z^\alpha \{1 - G(X)\} = - \int^Z X^\alpha \, dG(X) + \int^Z [X^\alpha \{1 - G(X)\}] \, \alpha \, dLX$$
$$+ \text{constante}.$$

7. Composition des écarts typiques. Revenons à la composition des écarts; d'après les formules (17) et (20), on retrouvera la formule

(21) $$A^{\alpha} = A_1^{\alpha} + \ldots + A_n^{\alpha}.$$

Cette formule ne concerne plus les écarts médians mais les écarts typiques au sens précisé plus haut. Elle exprime que la *somme des puissances α des écarts typiques de n variables indépendantes obéissant à n lois de la classe C_α est égale à la puissance α de l'écart typique de la variable résultante* qui, nous l'avons vu, obéit aussi nécessairement à une loi de la classe C_α.

8. Variable et forme réduites. L'introduction de l'écart typique permet d'appeler *variable réduite*, $\overline{X}_1$ le quotient de la variable X_1 par son écart typique A_1 et *forme réduite* de la fonction de probabilité totale $G_1(X_1)$, l'expression $\overline{G}_1(\overline{X}_1) = G_1(\overline{X}_1 A_1)$. On voit alors qu'on a

$$\lim_{\overline{X}_1 \to +\infty} \overline{X}_1 \{-\log \overline{G}_1(\overline{X}_1)\}^{1/\alpha} = \lim_{X_1 \to +\infty} \overline{X}_1 \{1 - \overline{G}_1(\overline{X}_1)\}^{1/\alpha} =$$
$$= \frac{1}{A_1} \lim_{X_1 \to +\infty} X_1 \{1 - G_1(X_1)\}^{1/\alpha} = (\log 2)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

D'où:

(22) $$\log \overline{G}_1(\overline{X}_1) = -\overline{X}_1^{-\alpha} \log 2 [1 + \omega_1(\overline{X}_1)]$$

$\omega_1(\overline{X}_1)$ étant une fonction de $\overline{X}_1$ infiniment petite avec $\frac{1}{\overline{X}_1}$, [1]) ou encore

(23) $$\log G_1(X_1) = -\overline{X}_1^{-\alpha} A_1^{\alpha} \log 2 \left[1 + \omega_1\left(\frac{X_1}{A_1}\right)\right]$$

On a de même dans la formule (17)

(24) $$\log H(Z) = -Z^{-\alpha} A^{\alpha} \log 2 \left[1 + \Omega\left(\frac{Z}{A}\right)\right].$$

De sorte que cette formule peut aussi s'écrire

$$\Omega\left(\frac{Z}{A}\right) = \frac{A_1^{\alpha}}{A^{\alpha}} \omega_1\left(\frac{Z}{A_1}\right) + \ldots + \frac{A_n^{\alpha}}{A^{\alpha}} \omega_n\left(\frac{Z}{A_n}\right)$$

---

[1]) Comme $G_1(X_1)$ peut être nul pour des valeurs positives de X_1, $\omega_1(\overline{X}_1)$ peut être infini pour ces valeurs. Mais $\omega_1(\overline{X}_1)$ est certainement fini (et même très petit) pour $\overline{X}_1$ assez grand.

ou

$$(25) \qquad \Omega(Z) = \frac{A_1^\alpha}{A^\alpha}\omega_1\left(\frac{A}{A_1}Z\right) + \ldots + \frac{A_n^\alpha}{A^\alpha}\omega_n\left(\frac{A}{A_n}Z\right).$$

Nous allons déduire de cette relation plusieurs formules qui nous seront utiles plus loin.

9. Familles normales. Nous remarquons d'abord que les fonction $\omega_1(Z), \ldots, \omega_n(Z)$ ne sont nécessairement finies que pour Z assez grand, par exemple pour $Z > P$. Mais comme $\frac{A}{A_1}Z, \ldots \frac{A}{A_n}Z$ sont plus grands que Z, on voit que $\Omega(Z)$ sera aussi fini pour $Z > P$.

On peut toujours former une fonction $\lambda(Z)$ qui majore $\omega_1(Z), \ldots \omega_n(Z)$, tende vers zéro avec $\frac{1}{Z}$ et soit finie pour $Z > P$. Par exemple, on peut prendre pour chaque valeur de Z, $\lambda(Z)$ égal à la plus grande des valeurs absolues de $\omega_1(Z), \ldots \omega_n(Z)$. On peut même supposer que $\lambda(Z)$ soit non croissant: il suffit de remplacer $\lambda(Z)$ par la borne supérieure de $\lambda(Z')$ pour $Z' > Z$.

Nous dirons que des fonctions

$$(26) \qquad G(Z) = B^\alpha Z^{-\alpha}\left[1 + \omega\left(\frac{Z}{B}\right)\right]$$

appartenant à une même classe C_α appartiennent à une même famille normale s'il existe une même fonction $\mu(Z)$ finie ou infinie, mais non croissante et tendant vers zéro avec $\frac{1}{Z}$, telle que pour les fonction G considérées, les fonction $\omega(Z)$ correspondantes soient majorées par $\mu(Z)$.

Nous avons vu qu'un nombre fini de fonction $G_1(Z), \ldots G_n(Z)$ de la classe C_α appartient toujours à une famille normale. Mais ce qui est intéressant c'est que la loi résultante $H(Z)$ appartient à la même famille normale.

En effet, on a par exemple.

$$\left|\omega_1\left(\frac{A}{A_1}Z\right)\right| \leqslant \mu\left(\frac{A}{A_1}Z\right) \leqslant \mu(Z)$$

et en vertu de (25) et de (21)

$$(27) \qquad |\Omega(Z)| \leqslant \mu(Z).$$

On peut même obtenir un résultat plus précis. Soit M le plus grand des nombres $A_1, A_2, \dots A_n$. On aura

$$\left|\omega_1\left(\frac{A}{A_1}Z\right)\right| \leqslant \mu\left(\frac{A}{A_1}Z\right) \leqslant \mu\left(\frac{A}{M}Z\right)$$

et d'après (25) et (21)

$$|\Omega(Z)| \leqslant \mu\left(\frac{A}{M}Z\right). \tag{28}$$

Et puisque $\frac{A}{M}Z > Z$, on a ainsi une limitation plus étroite (on au moins aussi étroite) que celle donnée par la formule (27). Alors que les fonction $\omega_1(Z) \dots \omega_n(Z)$ sont, dans leur ensemble, majorées par $\mu(Z)$, la fonction résultante $\Omega(z)$ est majorée par une fonction $\mu_1(Z) = \mu\left(\frac{A}{M}Z\right)$ qui est $\leqslant \mu(Z)$.

II. Variables aléatoires en nombre infini.

10. Existence d'une loi résultante. Nous allons maintenant utiliser les relations (21), (24) et (25) pour chercher ce que devient la loi de probabilité $H(z)$ de l'écart final, quand le nombre des écarts partiels devient infini. Nous avons vu que si les écarts partiels en nombre fini obéissent à des lois de probabilités de la classe C_α, il en est de même de l'écart final.

On ne peut se contenter de dire que par un simple passage à la limite, ce résultat s'étend au cas où les écarts partiels, toujours régis par des lois de la classe C_α sont en nombre infini.

Il n'est même pas évident qu'il existe dans ce cas une loi de probabilité de l'écart final.

Appelons Z_n le plus grand des nombres ($\geqslant 0$) $X_1, \dots X_n$; T la borne supérieure des nombres $X_1, \dots X_n, X_{n+1}, \dots$ Soit $H_n(Z)$ la probabilité pour que $Z_n \leqslant Z$. On a vu que

$$H_n(Z) = G_1(Z) \dots G_n(Z) \tag{29}$$

et comme $\quad 0 \leqslant G_i(Z) \leqslant 1, \quad$ on a:

$$1 \geqslant H_1(Z) \geqslant H_2(Z) \dots \geqslant H_n(Z) \geqslant \dots \geqslant 0.$$

Donc $H_n(Z)$ tend vers une fonction comprise entre 0 et 1. Et comme chacune des fonctions $H_n(Z)$ est non décroissante, il en sera de

même de sa limite. On sait même que dans ces conditions la convergence est uniforme.

Nous allons admettre que le théorème des probabilités composées s'étend à une suite infinie (dénombrable) d'évènements. (C'est une hypothèse généralement admise comme évidente mais qui mériterait d'être étudiée). Dans ces conditions, la limite de $H_n(Z)$ est la probabilité pour que l'on ait à la fois

$$X_1 \leqslant Z,\ X_2 \leqslant Z, \ldots\ X_n \leqslant Z \ldots$$

et par suite, c'est la probabilité $H(Z)$ pour que l'écart final $T \leqslant Z$. Ainsi

$$H(Z) = G_1(Z) \,.\, G_2(Z) \,.\,.\,.\,.\,.\, G_n(Z) \,.\,.\,.\,. \tag{30}$$

Il reste à savoir si cette loi de probabilité appartient comme les $G_n(Z)$ à la classe C_α. Dans l'inégalité évidente

$$-Z^\alpha \log G_1(Z) - \ldots - Z^\alpha \log G_n(Z) \leqslant -Z^\alpha \log H(Z) \tag{31}$$

le premier membre tend, pour n fixe, vers $(A_1^\alpha + \ldots + A_n^\alpha) \log 2$ quand Z croit indéfiniment. Donc, *lorsque des écarts partiels régis par des lois de probabilités de la classe C_α sont en nombre infini, la loi de probabilité de leur écart résultant ne peut appartenir à la classe C_α que si la somme des puissances α des écarts typiques de ces écarts partiels, est convergente.*

11. Famille normales de lois de la classe C_α. Sans rechercher si la condition nécessaire que nous venons de trouver est suffisante dans le cas le plus général nous nous contenterons de montrer qu'il en est ainsi lorsque les fonction $G_n(Z)$ — appartenant à la classe C_α — appartiennent aussi à une même famille normale. En effet, des notations convenables permettent d'écrire

$$-\log H_n(Z) = Z^{-\alpha} B_n^\alpha \left[1 + \Omega_n\left(\frac{Z}{B_n}\right)\right] \log 2, \quad \text{avec} \tag{32}$$

$$B_n^\alpha = A_1^\alpha + \ldots + A_n^\alpha. \tag{33}$$

Si nous appelons M_n le plus grand des nombres $A_1, A_2, \ldots A_n$ et M la borne supérieure des nombres $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$, on aura d'après (28) avec le changement de notations approprié:

$$|\Omega_n(Z)| \leqslant \mu\left(\frac{B_n}{M_n} Z\right) \tag{34}$$

μ étant une fonction non croissante et tendant vers zéro avec $\frac{1}{Z}$ qui majore toutes les fonctions de la famille normale considérée.

Nous supposons convergente la série ΣA_n^α. Appelons sa somme A^α on aura $B_n < A$, $M_n \leqslant M$.

Pour n assez grand, M_n reste égal à M, puisque les A_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc pour n assez grand

$$(35) \qquad \left| \Omega_n\left(\frac{Z}{B_n}\right) \right| \leqslant \mu\left(\frac{Z}{M}\right).$$

Ainsi pour n assez grand ($n > p$, p indépendant de Z)

$$(36) \qquad -\log H_n(Z) \leqslant Z^{-\alpha} A^\alpha \left[1 + \mu\left(\frac{Z}{M}\right)\right] \log 2.$$

Le second membre est fini pour Z assez grand. $H_n(Z)$ tend vers $H(Z)$ quand n croit indéfiniment; $H(Z)$ n'est donc pas nul quand Z est assez grand. Par suite, on peut poser

$$(37) \qquad -\log H(Z) = Z^{-\alpha} A^\alpha \left[1 + \Omega\left(\frac{Z}{A}\right)\right] \log 2$$

et $\Omega(Z)$ sera fini pour Z assez grand. En comparant (32) et (37), on voit qu'on aura

$$\Omega\left(\frac{Z}{A}\right) = -1 - \frac{Z^\alpha A^{-\alpha}}{\log 2} \log H(Z) = \lim_{n\to\infty}\left[-1 - \frac{Z^\alpha B_n^{-\alpha}}{\log 2} \log H_n(Z)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Omega_n\left(\frac{Z}{B_n}\right)$$

et d'après (35)

$$(38) \qquad \left| \Omega\left(\frac{Z}{A}\right) \right| \leqslant \mu\left(\frac{Z}{M}\right)$$

ou

$$(39) \qquad |\Omega(Z)| \leqslant \mu\left(Z\frac{A}{M}\right)$$

On déduit d'abord de (38) que $\Omega(Z)$ tend vers zéro avec $1/Z$ et alors (37) montre que $H(Z)$ est de classe C^α, avec un écart typique égal à A. De (39), on déduit, puisque $A > M$

$$(40) \qquad |\Omega(Z)| \leqslant \mu(Z).$$

Par conséquent, $H(Z)$ appartient à toute famille normale qui comprend les $G_n(Z)$. Et même, nous avons obtenu l'inégalité (39), inégalité plus resserrée (ou pour certaines valeurs exceptionnelles de Z au moins aussi resserrée que (20)).

Finalement: *si des variables aléatoires indépendantes* $X_1, X_2, \ldots$ *en nombre infini sont régies par des lois de probabilité totale* $G_1(X_1), \ldots G_n(X_n) \ldots$ *appartenant à la classe* C_α *et à une même famille normale et si la série* $A_1^\alpha + A_2^\alpha + \ldots$ *des puissances* α *des écarts typiques de* $X_1, X_2, \ldots$ *est convergente, la borne supérieure* Z *des nombres* $X_1, X_2, \ldots$ *est régie par une loi de probabilité totale* $H(Z)$ *appartenant à la classe* C_α *et appartenant à la même famille normale que les* C_n *et l'écart typique* A *de* Z *est donné par la formule*

$$A^\alpha = A_1^\alpha + A_2^\alpha + \ldots \tag{42}$$

En outre, $H(Z)$ *appartient même à une famille normale plus étroite que celle des* G_n — *et précisée par l'inégalité* (41) *où* M *est le plus grand des écarts typiques* $A_1, A_2, \ldots$ Les formules de définition (23) et (37) des ω_n et de Ω montrent que G_n et H appartiendraient au type c_α si ω_n et Ω étuient nuls. On peut donc dire que *la loi de probabilité* $H(Z)$ *de* Z *est plus voisine d'une loi de type* c_α *que l'ensemble des lois de probabilités de* $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$

12. Cas des lois du type c_α. Prenons le cas particulier où $\mu(Z) = 0$, c'est à dire où les variables aléatoires sont soumises à des lois du type c_α

$$F_n(Z) = 2^{-A_n^\alpha z^{-\alpha}}. \tag{43}$$

Alors μ étant nul, Ω sera nul et $H(Z)$ sera du type c_α. On retrouve directement ce résultat en remarquant que

$$H(Z) = 2^{-(\Sigma A_n^\alpha) z^{-\alpha}},$$ d'où

$$H(Z) = 2^{-A^\alpha z^{-\alpha}} \tag{44}$$ avec

$$A^\alpha + A_1^\alpha + \ldots + A_n^\alpha + \ldots \tag{45}$$

Par contre, on voit que si la série ΣA_n^α est divergente, on a

$$H(Z) = \lim_{n \to \infty} H_n(Z) = \lim_{n \to \infty} 2^{-(A_1^\alpha + \ldots + A_n^\alpha) z^{-\alpha}} = 0. \tag{46}$$

Dans ce cas $H(Z)$ est nul pour toute valeur finie de Z, c'est à dire que la probabilité pour que Z soit fini est nulle. Il n'en résulte d'ailleurs pas que cet évènement soit impossible. Au con-

traire, cet évènement est certainement possible puisque, les variables aléatoires étant indépendantes, peuvent prendre des valeurs quelconques par exemple toutes inférieures à 4, d'où $Z \leqslant 4$. Mais cela est infiniment peu probable.

Nous avions prévu plus haut que dans le cas actuel de divergence de ΣA_n^α, $H(Z)$ ne pourrait appartenir à la classe C_α.

Nous voyons maintenant quelle est cette fonction $H(Z)$ et comment elle se distingue des fonctions de la classe C_α. Cependant on peut remarquer que

(47) $$H(Z) = \lim_{n\to\infty} H_n(Z)$$

et que la forme réduite de $H_n(Z)$ étant dans le cas actuel

(48) $$\overline{H}_n(Z) = 2^{\,z^{-\alpha}},$$

on a:

(49) $$2^{-z^{-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \overline{H}_n(Z)$$

Il ne nous semble pourtant pas que l'existence de cette limite de la forme réduite de $H_n(Z)$ permette de classer $H(Z)$ dans une catégorie déterminée. Physiquement Z est bien déterminé et aussi la probabilité $H(Z) = 0$. Nous constatons que la probabilité de $H(Z)$ est nulle et l'égalité (49) n'ajoute aucun éclaircissement à ce résultat parfaitement clair.

Tout au plus pourrait — on peut-être l'utiliser pour rechercher quelle est la probabilité pour que la plus grande des variables aléatoires soit $< Z$, dans la catégorie des épreuves où Z est fini. Mais ces épreuves étant extrêmement rares, le résultat obtenu serait de peu d'intérêt.

On pourrait peut être aussi dire: ce cas est intéressant pour donner un moyen simple approché de calculer la probabilité dans le cas où le nombre des variables sans être infini est très grand. C'est ce qui se passe dans le jeu de pile on face quand on remplace la distribution binomiale peu propre au calcul par une expression approchée au moyen de l'intégrale de Laplace. Mais ici, les formules pour n fini étant aussi simples que pour n infini cet avantage disparait.

La discussion précédente, nous a en tout cas donné une idée des difficultés qui se présentent lorsque la série ΣA_n^α étant divergente, on passe au cas plus général où les lois $G_n(Z)$ appartiennent à une famille normale de la classe C_α. C'est ce cas que nous allons étudier. Toutefois nous ferons auparavant une remarque incidente.

13. Autre définition des familles normales. Il est intéressant d'observer qu'on peut mettre sous une autre forme la définition des familles normales. Par hypothèse, si $G_n(X)$ appartient à la classe C_α, il existe un nombre $A_n > 0$, tel qu'en posant

$$\overline{G}_n(X) = G_n(X A_n), \qquad \text{on ait}$$

(50)
$$\lim_{X\to\infty}\left[\frac{-X^\alpha \log \overline{G}_n(X)}{\log 2}\right] = 1.$$

Comme on a

$$-X^\alpha \log \overline{G}_n(X) = [1 + \omega_n(X)] \log 2$$

on voit, si les G_n appartiennent à une famille normale, que quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre η tel que

$$|-X^\alpha \log \overline{G}_n(X) - \log 2| < \varepsilon \qquad \text{pour } X > \eta.$$

(Il suffit en effet que $\mu(\eta) \log 2 < \varepsilon$). C'est ce qui on peut exprimer en disant qu'il y a pour la formule (50) convergence *égale* quelque soit n.

Inversement, si $-X^\alpha \dfrac{\log \overline{G}_n(X)}{\log 2}$ converge „également", quel que soit n, vers l'unité quand X croit indéfiniment, la famille des G_n est normale. Il suffit d'appeler $\lambda(X)$, la borne supérieure des $\omega_n(X)$ quand n varie et $\mu(X)$ la borne supérieure de $\lambda(X')$ pour $X' \geqslant X$. Alors l'égale convergence montre que $\lambda(X)$ et par conséquent $\mu(X)$ sont finis pour X assez grand et même tendent vers zéro avec $1/X$.

Finalement des fonctions $G_n(X)$ appartenant à une même classe C_α et ayant par conséquent chacune une forme réduite $\overline{G}_n(X) = G_n(XA_n)$, *elles appartiennent, par définition, à une famille normale si la convergence de la formule* (50) *assurée pour chaque valeur de n est „égale" quel que soit n.* Il y a là une définition analogue à la définition de certaines familles normales par la considération de l'écart quadratique moyen dans le cas où Z est la somme des variables aléatoires

14. Cas où la série de puissances α des écarts typiques des variables est divergente. Nous savons déja que dans ce cas la loi de probabilité de la plus grande des variables n'appartient pas à la classe C_α.

Toutefois il est intéressant de se rendre compte de ce qui se passe. Nous allons démontrer la proposition suivante:

si des variables aléatoires indépendantes sont régies par des lois appartenant à une famille normale de la classe C_α et si la somme des puissances α des écarts typiques des ces variables est divergente, il y a une probabilité non nulle pour que la borne supérieure, Z, de ces variables soit infinie.

Nous avons même démontré sous ces hypothèses que dans un grand nombre de cas il y a une probabilité nulle pour que Z soit fini. Il nous semble que les hypothèses précédentes doivent même suffire pour démontrer ce dernier résultat. Peut-être quelque lecteur sera il-tenté de justifier cette présomption — et aussi de le faire dans le cas correspondant où Z est la somme des variables. — Si l'on y réussit ce sera sans doute par une voie directe qui remplacera par une seule démonstration probablement simple, les démonstrations qui suivent (n° 14)

I. Nous considérerons d'abord un cas où moyennant une hypothèse générale sur les formes réduites des fonctions de probabilité — c'est à dire sur les fonctions $\omega_n(Z)$ — le résultat obtenu peut être établi indépendamment de la façon dont série ΣA_n^α diverge, alors que ce mode de divergence devra intervenir dans ces autres cas (ou au moins dans les démonstrations relatives à ces cas et données plus loin). Les fonctions de probabilités $\omega_n(Z)$ de la formule (23) sont dans tous les cas bornées inférieurement et leur borne inférieure est $\geqslant -1$, puisque les probabilités G_n sont $\leqslant 1$.

Supposons que, pour toute valeur de Z, la borne inférieure des $\omega_n(Z)$ quand Z *et* n varient soit > -1, c'est à dire qu'il existe un nombre k, $(k > 0)$ tel que

$$(52) \qquad 1 + \omega_n(Z) > k$$

quels que soient n et Z.

Ce cas comprend celui où les fonctions $G_n(Z)$ seraient toutes de type c_α. Il comprend aussi le cas plus général où ces fonctions seraient de classe C_α et appartiendraient à une famille normale définie par une fonction $\mu(Z)$ dont la borne supérieure est inférieure à l'unité. Il suppose en particulier qu'aucun des $G_n(Z)$ n'est égal à l'unité pour une valeur finie de Z

Sous l'hypothèse (52), on a

$$-\log H_n(Z) > k\,A_1^\alpha Z^{-\alpha} + \ldots + k\,A_n^\alpha Z^{-\alpha} = k\,B_n^\alpha Z^{-\alpha}.$$

D'où:

$$-\log H(Z) > k\,B_n^\alpha Z^{-\alpha}.$$

Ceci ayant lieu quels que soient n et Z, on voit qu'on a $H(Z)=0$ pour toute valeur finie de Z.

Ainsi la série ΣA_n^α étant divergente si l'hypothèse (52) sur les formes réduites $\overline{G}_n Z)$ est vérifiée, la probabilité que la plus grande des variables aléatoires, (supposées régies par des lois de probabilité de la classe C_α), soit finie est nulle. Autrement dit ce cas est dénué d'intérêt pratique.

Il en serait de même si (52) au lieu d'avoir lieu pour tout n avait lieu à partir d'un cartain rang.

II. Laissons maintenant de coté l'hypothèse (48). Supposons que ΣA_n^α diverge et que les lois de probabilité appartiennent à une même famille normale dans la classe C_α. Nous allons d'abord établir une inégalité utile.

Partons de l'inégalité (34)

$$\left|\Omega_n\left(\frac{Z}{B_n}\right)\right| \leqslant \mu\left(\frac{Z}{M_n}\right). \tag{54}$$

Pour tout ε positif et <1 on peut déterminer un nombre $Z_\varepsilon > 0$ (indépendant des écarts typiques A_n) tel que

$$\mu(Z_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{55}$$

D'où

$$\left|\Omega_n\left(\frac{Z_\varepsilon M_n}{B_n}\right)\right| \leqslant \varepsilon < 1$$

et d'après (32)

$$-\log H_n(Z_\varepsilon M_n) > \left(\frac{M_n}{B_n}\right)^{-\alpha} \{Z_\varepsilon^{-\alpha}(1-\varepsilon)\log 2\}.$$

D'où:

$$-\log H(Z) > \left(\frac{M_n}{B_n}\right)^{-\alpha} \{Z_\varepsilon^{-\alpha}(1-\varepsilon)\log 2\} \tag{56}$$

pour toute valeur de $Z \leqslant Z_\varepsilon M_n$.

III. Supposons d'abord que les écarts $A_1, A_2, \ldots$ soient bornés supérieurement. Alors M_n reste inférieur à un nombre fixe $M>0$, et on a

$$-\log H(Z) > B_n^\alpha \{M^{-\alpha} Z_\varepsilon^{-\alpha}(1-\varepsilon)\log 2\}$$

pour $Z \leqslant Z_\varepsilon M_n$. Lorsque n tend vers l'infini, Z restant fixe, le second membre tend vers l'infini. Donc $H(Z)=0$ pour $Z < Z_\varepsilon M$. Mais observons que (55) reste vérifié si on remplace Z_ε par un

nombre supérieur quelconque. On voit bien finalement que $H(Z)$ est nulle pour toute valeur de Z.

IV. Supposons maintenant que M_n n'est plus borné supérieurement, mais que $\frac{M_n}{B_n}$ tend vers zéro quand n croit indéfiniment.

Alors le second membre de (56) devient infini avec n. Or si on laisse Z fixe, l'inégalité (56) devient vérifiée dès que n est assez grand pour que $M_n \geqslant \frac{Z}{Z_\varepsilon}$. Par conséquent $H(Z)$ est encore nul quelque soit Z.

V. Revenons au cas III pour le généraliser et admettons qu'il existe un nombre K, tel que l'ensemble des termes de la série

$$(57) \qquad A_1^\alpha + A_2^\alpha + \dots + A_n^\alpha + \dots$$

qui sont $< K$ soit divergente. Soient $X_1', X_2', \dots$ celles des variables $X_1, X_2, \dots$ qui correspondent aux termes de cette série partielle, Z' la plus grande des variables $X_1', X_2', \dots$ et $h(Z')$ sa loi de probabilité totale. On a évidemment $0 \leqslant H(Z) \leqslant h(Z)$ et d'après le paragraphe précédent $h(Z) = 0$.

On a donc encore $H(Z) = 0$ pour toute valeur de Z.

Si la condition admise ci-dessus pour la série divergente (57) n'est pas vérifiée, alors pour tout entier r, la suite des termes de cette série inférieurs à r est finie ou convergente. Dans ce second cas, éliminons le reste de la série à partir d'un rang tel que ce reste soit inférieur à $\frac{\theta}{2^r}$, θ étant un nombre arbitraire > 0.

L'ensemble des termes éliminés en donnant à r successivement toutes les valeurs entières, s'il y en a, forme évidemment une série convergente et de somme inférieure à θ. Soient X_1'', X_2'', ... l'ensemble des variables correspondant aux termes éliminés, s'il y en a, Z'' la plus grande, $k(Z'')$ sa fonction de probabilité totale. Soient de même X_1', X_2', ... Z', $h(Z')$ les quantités correspondantes pour les termes non éliminés — et qui sont nécessairement en nombre infini. On a

$$(58) \qquad H(Z) = h(Z) \, . \, k(Z)$$

et d'après ce qui précède

$$(59) \qquad k(Z) = B^\alpha Z^{-\alpha}\left[1 + \Omega\left(\frac{Z}{B}\right)\right];$$

$\Omega(Z)$ étant une fonction de Z infiniment petite avec $1/Z$, B^α étant une constante inférieure à θ.

On voit qu'on est alors ramené à étudier le cas de $h(Z')$ qui correspond à des variables indépendantes X'_1, $X'_2, \ldots$ telles que la série des écarts typiques correspondants

$$A_1^\alpha + A_2^\alpha + \ldots$$

soit divergente et qu'il n'y ait, quelque soit r, qu'un nombre fini de termes de cette série inférieurs à r. On peut alors ranger les variables $X'_1, X'_2, \ldots$ dans un ordre tel que les termes de cette série ne décroissent pas et augmentent indéfiniment.

VI. Il reste donc à examiner le cas où les termes de la série

$$(60) \qquad A_1^\alpha + A_2^\alpha + \ldots + A_n^\alpha + \ldots$$

sont rangés par ordre de grandeur et tendent vers l'infini, sans que le rapport $\frac{M_n}{B_n}$ — c'est à dire ici $\frac{A_n}{[A_1^\alpha + \ldots + A_n^\alpha]^{1/\alpha}}$ — tende vers zéro. C'est ce qui a lieu, par exemple, si la série est une progression géomètrique de raison > 1.

Comme je l'ai dit plus haut, il me parait probable qu'on a encore dans ce cas $H(Z) \equiv 0$; de sorte que dans le cas V, on aurait $h(Z) = 0$, d'où $H(Z) = 0$ et il serait établi que $H(Z) = 0$ toutes les fois que — les lois composantes appartenant à une famille normale de la classe C_α, — la série (60) est divergente.

C'est en tout cas ce qui a lieu dans le cas oú les lois composantes sont du type c_α, ou satisfont à l'hypothèse (52).

Il me semble même que la démonstration que je n'ai pu obtenir doit être cependant assez simple.

Quoiqu'il en soit, nous allons au moins établir dans le cas restant un résultat partiel suffisant pour notre but. Nous avons encore la formule (56) pour $Z \leqslant Z_\varepsilon M_n$. Nous avons donc

$$(61) \qquad -\log H(Z) > Z_\varepsilon^{-\alpha}(1-\varepsilon)\log 2$$

Sans supposer nécessairement les A_n non décroissants, il suffit de supposer les M_n non bornés, pour voir que cette relation aura lieu quel que soit Z. Donc : pour toute valeur de Z, $H(Z)$ est inférieure à une quantité fixe, elle-même inférieure à l'unité. Comme $H(Z)$ est nulle si, la série ΣA_n^α étant divergente, M_n est borné, on voit que le résultat précédent s'étend aussi à ce cas.

Ainsi: *les variables indépendantes* $X_1, \dots X_n, \dots$ *étant supposées régies par des lois de probabilité appartenant à une famille normale de la classe* C_α, *si la série des puissances* α *des écarts typiques de ces variables est divergente, il y a une probabilité non nulle,* Q, *pour que la plus grande* Z *de ces variables soit infinie* — contrairement à ce qui se passe pour chacune des variables X_n. Il semble que ce résultat partiel soit suffisant pour éliminer tous les cas où ΣA_n^α diverge, des cas intéressants au point de vue pratique.

D'ailleurs le dernier cas étudié va nous permettre d'étendre encore la généralitê des cas où nous avons démontré que $H(Z) \equiv 0$.

Au lieu de l'hypothèse (52), faisons l'hypothèse suivante évidemment plus générale: qu'il n'existe aucune suite de nombres u_n tendant vers zéro, tels que $1 + \omega_n(u_n)$ tende vers zéro. Mais admettons en outre que les A_n tendent vers l'infini sans décroître.

On a:

$$-\log H_n(Z) = \left\{A_1^\alpha Z^{-\alpha}\left[1 + \omega_1\left(\frac{Z}{A_1}\right)\right] + \dots \right.$$

$$\left. + A_n^\alpha Z^{-\alpha}\left[1 + \omega_n\left(\frac{Z}{A_n}\right)\right]\right\} \log 2.$$

Les nombres $u_n = \dfrac{Z}{A_n}$ tendent vers zéro. Donc quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de $p: p_1, p_2, \dots$ tels que

$$1 + \omega_{p_k}(u_{p_k}) > \varepsilon.$$

Par suite

$$-\log H_n(Z) > \varepsilon Z^{-\alpha} S_n$$

S_n étant la somme des $A_{p_k}^\alpha$ tels que $p_k \leqslant n$. Lorsque $n \to \infty$, $S_n \to \infty$ $H_n(Z) \to H(Z)$. Donc $H(Z) = 0$.

15. Etude de la limite des lois réduites. A l'exemple de M. Paul Lévy dans le cas où Z est la somme des variables, nous pouvons nous demander ce que deviennent les formes réduites $\overline{H}_n(Z) = H_n(Z B_n)$.

On a obtenu la formule (34)

$$|\Omega_n(Z)| \leqslant \mu\left(\frac{B_n}{M_n} Z\right)$$

et d'après (32)

$$\text{(62)} \qquad -\log \overline{H}_n(Z) = Z^{-\alpha}[1 + \Omega_n(Z)] \log 2.$$

Considérons comme M. Paul Lévy le cas où $\dfrac{B_n}{M_n}$ tend vers

l'infini avec $\frac{1}{n}$. Alors, des deux relations (34) et (62), on tire

$$\lim_{n\to\infty} \overline{H}_n(Z) = 2^{-Z^{-\alpha}}.$$

Donc: *si des variables aléatoires en nombre infini sont régies par des lois de probabilité appartenant à une famille normale dans la classe C_α et si le rapport du plus grand des écarts typiques des n premières variables à l'écart typique de la plus grande de ces n variables tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la loi de probabilité réduite de la plus grande des n premières variables tend, quand n croit indéfiniment, vers la loi réduite du type c_α*. Bien entendu l'hypothèse que $\frac{M_n}{B_n}$ tend vers zéro implique la divergence de la série ΣA_n^α.

Mais alors comme nous l'avons vu plus haut n° 14, § IV, $H(Z) = 0$: la probabilité que la plus grande des variables ait une valeur finie est nulle. Ceci réduit considérablement la portée de la remarque sur la limite des formes réduites des $H_n(Z)$.

Car, une observation ne se présente pas physiquement comme limite d'une suite d'observations successives où agissent 1, puis 2, puis 3,... causes d'erreurs distinctes. Quand $H(Z) = 0$, le fait que $\lim \overline{H}_n(Z)$ existe et est de la forme $2^{-Z^{-\alpha}}$ n'a plus de signification précise. On pourrait dire que ce cas limite éclaire le cas où le nombre de causes d'erreurs sans être infini est très grand. Mais il l'éclaire mieux quand on suppose ce qui a réellement lieu dans la pratique, c'est à dire que la probabilité d'une erreur infinie est nulle, cas que nous avons considéré au n° 11.

Si cependant à titre de curiosité, on s'intéresse à la limite des formes réduites $\overline{H}_n(Z)$, on observera que dans bien des cas cette limite sans être du type c_α est de classe C_α. Il nous semble probable qu'on doit pouvoir prouver ceci: Quand des variables aléatoires indépendantes en nombre infini sont régies par des lois appartenant à une famille normale dans C_α, la forme réduite de la loi de probabilité de la plus grande des variables tend vers une fonction du type C_α appartenant à la même famille normale.

La proposition est démontrée quand il y a convergence de la série ΣA_n^α ou quand avec la divergence de ΣA_n^α, on suppose $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{B_n} = 0$. Cette dernière condition, évidemment, n'est pas néces-

saire, comme le montre l'exemple où les lois partielles sont du type c_α.

Pour indiquer un autre exemple, considérons le cas où

$$\omega_1(Z) = \ldots = \omega_n(Z) = \ldots = \frac{1}{Z^\beta}$$

$$A_n = q^n, \qquad q > 1.$$

Les $\omega_n(Z)$ étant identiques, la famille est normale. On a

$$B_n^\alpha = \frac{q^{(n+1)\alpha} - 1}{q^\alpha - 1}.$$

D'après (25), avec les changement de notations convenables

$$\Omega_n(Z) = \frac{A_1^\alpha}{B_n^\alpha}\,\omega_1\left(\frac{B_n}{A_1}Z\right) + \ldots + \frac{A_n^\alpha}{B_n^\alpha}\,\omega_n\left(\frac{B_n}{A_n}Z\right),$$

c'est à dire ici:

$$\Omega_n(Z) = \frac{E_n}{Z^\beta}$$

avec

$$E_n = \frac{q^{(n+1)(\alpha+\beta)} - 1}{[q^{(n+1)\alpha} - 1][q^{(n+1)\beta} - 1]}\;\frac{(q^\alpha - 1)(q^\beta - 1)}{q^{\alpha+\beta} - 1}.$$

Lorsque n croit indéfiniment, E_n tend vers

$$E = \frac{(q^\alpha - 1)(q^\beta - 1)}{q^{\alpha+\beta} - 1} = 1 - \frac{q^\alpha + q^\beta - 2}{q^{\alpha+\beta} - 1}$$

quantité > 0 et < 1, et

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n(Z) = \frac{E}{Z^\beta} = \Omega(Z).$$

D'une part, les formes réduites $\overline{H}_n(Z)$, données par

$$-\log \overline{H}_n(Z) = Z^{-\alpha}[1 + \Omega_n(Z)]\log 2$$

tendent vers une limite déterminée $\overline{H}(Z)$ appartenant à la classe C_α, à la même famille normale que les G_n et même à une famille normale plus étroite (puisque $E < 1$), car

$$-\log \overline{H}(Z) = Z^{-\alpha}\left[1 + \frac{E}{Z^\beta}\right]\log 2.$$

Mais cette formule montre que la limite de la forme réduite n'appartient au type c_α pour aucune valeur de α.

D'autre part, on a

$$-\log H_n(Z) = Z^{-\alpha} B_n^\alpha\left[1 + \Omega_n\left(\frac{Z}{B_n}\right)\right]\log 2$$

$$= B_n^{\alpha+\beta}\left[Z^{-\alpha}\left(\frac{1}{B_n^\beta} + \frac{E_n}{Z^\beta}\right)\right]\log 2.$$

On voit ainsi que $H_n(Z)$ tend vers zéro avec $1/n$. Donc $H(Z) = 0$ quel que soit Z. (Ceci résulte aussi de notre proposition générale du n⁰ 14, § VI, puisqu'ici il n'existe aucune suite de nombres u_n tendant vers zéro avec $1/n$ et tels que $1 + \omega_n(u_n)$ tende vers zéro).

16. Conclusion. Il suffira de comparer ce qui précéde à l'exposé de M. Paul Lévy, pour constater que nous avons pu modeler le nôtre sur le sien en étudiant la probabilité de la plus grande erreur au lieu de celle de la somme des erreurs. Mais nous avons finalement obtenu un résultat tout différent où le rôle de l'intégrale de Laplace $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}\,dx$ est tenu, en ce qui concerne la forme „réduite" de la loi de probabilité totale, par la fonction $2^{-x^{-\alpha}}$ $(\alpha > 0)$. (L'expression de la probabilité élémentaire égale dans le premier cas à $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-X^2}dX$ est ici $\alpha X^{-\alpha-1}\, 2^{-X^{-\alpha}} \log 2 \,.\, dX =$ $= \frac{\alpha(\log 2)\,dX}{X^{\alpha+1}\, 2^{1/X^{\alpha}}}$. On remarquera que cette probabilité est nulle pour $X = 0$ et maximum pour une valeur de $X \neq 0$: Les héros de roman prétendent de même être plus en sécurité au but lui-même, visé par un mauvais tireur, qu'à coté du but).

Il y a lieu de remarquer que, même en se plaçant au point de vue de l'additivité des erreurs, notre mode d'exposition permet de distinguer plus nettement les rôles respectifs des deux conditions étudiées par M. Paul Lévy. En la transposant dans la méthode de M. Paul Lévy, on voit que la condition: famille normale, a pour effet de créer une classe de lois de probabilités totales „également" voisines à l'infini de celle de Gauss et dans laquelle reste la loi de probabilité de l'erreur somme d'un nombre fini ou infini d'erreurs partielles. C'est la seconde condition: $\frac{M_n}{B_n}$ petit, grâce à laquelle l'erreur résultant de n erreurs suit approximativement la loi de Gauss, non seulement à l'infini, mais partout.

12 Septembre 1927.

Compte-rendu des séances de la Société Polonaise de Mathématique à Cracovie

20. X. 1926. W. Wilkosz: *La structure de la démonstration du théorème de Jordan d'après Brouver.*

M. W. analyse les notions importantes de topologie que M. Brouver introduit dans son mémoire relatif à la démonstration du théorème de Jordan.

3. XI. 1926. A. Rosenblatt: *Sur un point de la théorie mathématique des fluides visqueux.*

M. R. fait un exposé de ses recherches sur les efforts agissant au sein d'un liquide visqueux, publiées dans le N° de janvier 1927 du „Bulletin des Sciences Mathématiques".

20. XI. 1926 et 27. XI. 1926. T. Ważewski: *Sur un point de la théorie de l'aire des surfaces.*

M. W. donne une démonstration du théorème suivant: Tout ensemble ayant une aire finie au sens de Peano peut être approché par des sousensembles fermés d'aires infiniment voisines.

11. XII. 1926. W. Wilkosz: *Sur la relation entre les surfaces de M. Brouver et la théorie des fonctions implicites.*

M. W. démontre que tout ensemble limité et fermé de l'espace ayant en chaque point le charactère d'un triangle topologique est une surface fermée au sens de M. Brouver.

8. I. 1927. O Nikodym: *Sur l'orientation des polivecteurs.*

Après avoir axiomatisé les vecteurs d'après M. H. Weyl, (Raum-Zeit Materie), M. N. considère l'espace V dont les „points" sont des n-vecteurs. Un n-vecteur („point") est dit singulier, si les vecteurs dont il se compose, sont linéairement dépendants. Si l'on introduit une notion naturelle de la limite d'une suite infinie

de „points“, on peut parler d'ensembles ouverts, fermés, continus, domaines etc. Deux n-vecteurs A, B s'appellent équi-orientés s'il existe une courbe de Jordan (c'est-à-dire une image univoque et continue du segment fermé $\langle 0,1 \rangle$) contenant A et B et ne contenant aucun „point“ singulier. Or M. N. démontre que l'ensemble de tous les n-vecteurs singuliers découpe l'espace V en deux domaines (ouverts) saturés, chacun desquels ne se compose que de n-vecteurs équi-orientés. Chaquun de ces domaines s'appelle „orientation“: Il y a deux et seulement deux „orientations“ différentes de polivecteurs.

22. I. 1927 et 29. I. 1927. W. Wilkosz: *Les applications de la totalisation à la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique.*

M. W. démontre quelques théorèmes concernant les changements que l'on peut introduire dans l'ordre des intégrations successives dans le cas des intégrales itérées de M Denjoy. Ensuite il en donne certaines applications à la théorie des fonctions harmoniques.

26. II. 1927. O. Nikodym: *Sur un ensemble plan, fermé, tel que la somme de toutes les droites qui ne le rencontrent pas, est un ensemble non mesurable.* (*B*).

Paru dans des Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie XIX, 1926, classe III, p. 39—80.

14. V. 1927. Séance consacrée à la mémoire du prof. François Mertens.

M. Zaremba ouvre la séance avec un éloge de F. Mertens, ancien professeur à l'Université Jagiellonnienne de Cracovie. Ensuite M. Rosenblatt fait une conférence sur les travaux scientifiques de F. Mertens. La conférence annoncée de M. Wilkosz sur „L'importance et les développements du théorème de Cauchy-Mertens“ n'a pas eu lieu à cause d'une indisposition du conférencier.

28. V. 1927. A. Rosenblatt. *Sur le théorème de Joukovsky dans la théorie des surfaces sustentatrices en aérodynamique.*

M. R. envisage le mouvement irrotationel. permanent et plan d'un fluide parfait autour d'un profil K. D'après le théorème de Joukovsky, la résultante des pressions est égale à

$$P_x + iP_y = i\varrho C(u_\infty + iv_\infty),$$

où C désigne la circulation, $u_\infty + iv_\infty$ la vitesse à l'infini et ϱ la densité du fluide.

Cette formule est inexacte dans le cas, où le profil K possède des points anguleux d'ouverture 2π. Dans ce cas M. R. la remplace par la formule plus générale que voici:

$$P_x + i P_y = i \varrho\, C(u_\infty + i v_\infty) + \varrho \pi \Sigma\, \overline{Res_P}(w^2),$$

la somme étant étendue aux résidus de la fonction $w^2 = (u - iv)^2$ aux points anguleux P et le trait désignant les valeurs imaginaires conjuguées. La démonstration de cette formule se trouve dans une Note de M. R. „Sur le théorème de Kutta-Joukovsky" publiée dans les Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1927, Vol. V, p. 5.

21. X. 1927. G. Neyman: *Sur certaines méthodes pour l'évaluation de la vraissemblance des hypothèses.*

Voir „Poradnik dla samouków", supplément au tome 7.

5. XI. 1927. A. Rosenblatt: *Sur la théorie des surfaces sustentatrices en aérodynamique.*

M. R. rectifie un résultat obtenu par M. Finzi, exposé dans une note intitulée „Interpretazione energetica d'una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski" publiée dans les Rendiconti della R. Nazionale Accademia dei Lincei. Le résultat de M. Rosenblatt est exposé dans une Note à paraître dans les Rendiconti dei Lincei de 1927.

19. XI. 1927. W. Wilkosz: *Certaines propriétés intégrales des solutions des équations différentielles.*

M. W. démontre le théorème suivant: Considérons une fonction $f(x, y)$ de la classe C^1 dans une région fermée, connexe et limitée. Il existe une fonction

$$y = F(x, C)$$

de la classe C^1, telle que la fonction de x

$$y = F(x, C_0),$$

lorsque C_0 appartient à un certain intervalle, représente toujours une ou plusieurs solutions de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y),$$

chacune dans son intervalle maximum d'existence, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial C}$ étant toujours différente de zéro. De plus la fonction $F(x, C)$ fournit toutes les solutions de l'équation différentielle considérée.

26. XI. 1927. T. Ważewski: *Sur une propriété des fonctions dérivables.*

Voir l'article de M. W. inséré dans le présent volume.

3. XII. 1927. W. Wilkosz: *Sur quelques problèmes intégraux de la théorie des équations différentielles.*

La solution de plusieurs problèmes concernants la nature topologique des intégrales d'une équation de la forme

$$y' = f(x, y)$$

nous permet de pousser considérablement notre connaissance de la structure topologique des intégrales d'une équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Plusieurs de ces thérèmes font l'objet de la conférence de M. W.

5. XII. 1927. W. Wilkosz: *La théorie des quasi-équations différentielles.*

M. W. fait l'exposé des méthodes de M. Carathéodory et des siennes concernant les quasi équations différentielles.

10. XII. 1927. St. Gołąb: *Une nouvelle méthode de calculer la longueur d'un orbe de Jordan*[1]).

Soit C un orbe de Jordan appartenant à un plan P, soit I l'intérieur de C, i un point fixe de I et p un point fixe de P.

Désignons par S_ϑ le système de cordonnées rectangulaires ayant p pour origine et dont l'axe des abscisses renferme l'angle ϑ avec un axe fixe.

Soit $R_{n,\vartheta}$ le réseau des carrés aux côtés $= \frac{1}{n}$ correspondant au système S_ϑ.

Désignons par $Z_{n,\vartheta}$ la somme des carrés fermés relatifs au réseau $R_{n,\vartheta}$ remplissant les conditions suivantes:

α) $Z_{n,\vartheta} \subset I$,

β) $Z_{n,\vartheta}$ contient tous les carrés renfermant i,

γ) si C_1 et C_2 sont deux carrés ayant un côté commun et que $C_1 \subset Z_{n,\vartheta}$, $C_2 \subset I$, alors $C_2 \subset Z_{n,\vartheta}$.

---

[1]) Ce résultat a été présenté le 21. XI. 1927 au Séminaire de M. W. Wilkosz.

Soit $f_n(\vartheta)$ la longueur de la frontière de $Z_{n,\vartheta}$. A partir d'un certain n les fonctions $f_n(\vartheta)$ sont définies dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sous de certaines conditions de régularité on a

$$\text{longueur de } C = \tfrac{1}{2} \lim_{n | \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(\vartheta)\, d\vartheta.$$

La démonstration est basée sur un lemme non publié de M. Ważewski.

16 XII. 1927. C. Kuratowski: *Sur les décompositions semi-continues et les frontières communes à deux régions.*

M. K. expose l'état actuel de la théorie de décomposition sémi-continue. Parmi les résultats non publiés M. K. anonce le suivant: tout continu borné C qui est la frontière commune à deux régions situées sur le plan admet une décomposition cyclique en sous-continus (sauf le cas où C est „monostratique"). De plus, on peut définir cette décomposition de façon qu'elle ne puisse être poussée plus loin. La fonction continue déterminée par cette décomposition (qui transforme le continu C en une circonférence) peut être, dans le cas où C est situé sur la surface de la sphère, prolongée à toute la surface. Cf Fund Math. XI et XII.

17. I 1928. B. Knaster: *Sur la théorie de dimensions de Menger-Urysohn.*

Après un aperçu historique M. K. considère les conditions, imposées par l'intuition géométrique à la notion de dimension et montre que celle donnée par les définitions, d'ailleurs équivalentes, de Menger et Urysohn satisfait à ces conditions.

L'opération topologique de localisation des invariants, sur laquelle repose cette notion, constitue une nouvelle application de la Théorie des Ensembles à la Topologie et elle s'est montrée féconde, même en dehors de la théorie de dimensions, dans l'étude de la structure des continus, dont elle a permis de découvrir des nouvelles propriétés importantes.

M. K. cite ensuite les principaux théorèmes de la théorie de Menger-Urysohn, relatifs à l'addition, décomposition, immersion, transformations continues et, réciproquement, stratification semi-continue et continue (Moore, Kuratowski) d'ensembles de dimension n en ceux de dimension $m \neq n$. En rappelant les problèmes encore ouverts, liés à ces groupes de théorèmes, M. K. signale la solution trouvée par

lui (à paraître dans Amer. Journ. of Math.) d'un problème posé (ibid. 1926) par M. W. A. Wilson, notamment l'existence d'un continu plan borné irréductible entre deux points (donc 1-dimensionnel) admettant une décomposition continue (donc 1-dimensionnelle) en sous-continus (1-dimensionnels) disjoints.

En terminant, M. K. expose la méthode récente des classes normales, due à M. Hurewicz (Math. Ann. 1927) et qui constitue une relativisation naturelle de la notion de dimension de Menger-Urysohn. Elle donne un moyen très général de remplacer par des raisonnements simples, dont M. K. examine quelques exemples, plusieurs démonstrations importantes, où le facteur récurrentiel, inhérent à la définition-même de dimension, présentait jusqu'à présent des difficultés.

Comptes-rendu des séances de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Lwów

depuis le I. I. 1926 au 30. VI. 1927.

---

1. Séance du 23. I. 1926. Affaires administratives.

2. Séance du 17. II. 1926. Communiqués: a) *M.* M. Zarzycki: „Sur la théorie des ensembles abstraits"; b) *M.* H. Steinhaus: „Sur la théorie des séries numériques".

3. Séance du 3. III. 1926. Revue des publications: *M.* S. Banach. Communiqué: *M.* M. Zarzycki: „Une nouvelle façon d'introduire les ensembles bien ordonnés".

4. Séance du 10. III. 1926. Communiqués: a) *M.* W. Nikliborc: „Sur l'inégalité de Riesz"; b) *M.* S. Kaczmarz: „Sur les séries numériques"; c) *M.* H. Steinhaus: „Une méthode graphique pour la solution de l'équation de Keppler".

5. Séance du 17. III. 1926. Communiqué: *M.* S. Lubelski: „Sur quelques questions de la théorie des nombres".

6. Séance du 20. III. 1926. Communiqué: *M.* A. Łomnicki: „Démonstration de la loi de Gauss (loi normale de la dispersion)". Revue des publications: *M.* H. Steinhaus.

7. Séance du 23. III. 1926. Communiqués: a) *M.* M. Huber: „Sur les critères de l'équilibre stable"; b) *M.* S. Kaczmarz: „Sur la convergence en mesure"; c) *M.* W. Nikliborc: „Sur les fonctions implicites"; d) *M.* H. Steinhaus: „Sur l'approximation graphique d'une fonction au moyen d'une ligne droite".

8. Séance du 22. IV. 1926. Communiqué: *M.* S. Banach: „Sur un point de la théorie des séries infinies".

9. Séance du 12. V. 1926. Communiqués: a) *M.* H. Steinhaus: „Sur un certain nomogramme"; b) *M.* W. Nikliborc:

„Sur la méthode des approximations succesives"; c) *M.* Zarzycki: „Sur la structure des séries biorthogonales".

10. Séance du 26. V. 1926. Communiqué: *M.* S. Banach: „Sur les changements de variables dans une intégrale double". Revue des publications: *M.* S. Kaczmarz.

11. Séance du 8. VI. 1926. Communiqués: a) *M.* S. Banach: „Sur un point de la théorie des séries"; b) *M.* W. Orlicz: „Sur la théorie des séries orthogonales".

12. Séance du 15. VI. 1926. Communiqués: a) *M* K. Kuratowski: „Sur la topologie des courbes"; b) *M.* E. Żyliński: „De l'isomorphisme des algèbres linéaires"; c) *M.* E. Żyliński: „Sur une certaine propriété des discriminants dans la théorie générale des champs"; d) *M.* E. Żyliński: „Sur une question de probabilité "; e) *M.* W. Orlicz: „Sur la convergence des développements orthogonaux".

13. Séance du 9. X. 1926. Communiqués: a) *M.* H. Steinhaus: „Sur un certain nomogramme dans la théorie des chaudières à vapeur"; b) *M.* W. Orlicz: „Sur le phénomène de M. Carleman".

14. Séance du 16. X. 1926. Revue des publications: a) *M.* S. Kaczmarz, b) *M.* S. Banach. Communiqué: *M.* W. Birnbaum: „Sur l'intégrale de Cauchy".

15. Séance du 30. X. 1926. Communiqué: *M.* W. Nikliborc: „Sur l'équation $dz = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy$".

16. Séance du 14. XI. 1926. Communiqués: a) *M.* S. Ruziewicz: „Sur les fonctions satisfaisant la condition de Lipschitz généralisée"; b) *M.* Z. W. Birnbaum: „Sur l'intégrale de Cauchy"; c) *M.* S. Banach: „Sur l'intégrale de Stieltjes".

17. Séance du 12. XII. 1926. Revue des publications: *M.* E. Żyliński. Communiqué: *M.* Z W. Birnbaum: „Sur l'intégrale de Cauchy".

18. Séance du 22. I. 1927. Communiqués: a) *M.* M. T. Huber: „Sur un problème de mécanique conduisant à un système d'une infinité d'équations avec une infinité d'inconnues"; b) *M.* A. Łomnicki: „Essai de classification des fonctions d'une variable complexe".

19. Séance du 5. III. 1927. Communiqué: *M.* K. Weigel: „Sur la possibilité de l'application la loi de Gauss à une série à nombre fini d'erreurs". Revue des publications: *M.* S Kaczmarz.

20. Séance du 20. V. 1927. Revue des publications: *M.* H. Steinhaus. Communiqués: a) *M.* E. Żyliński: „Critère relatif à l'appartenance des nombres aux champs algébriques"; b) *M.* Z. Łomnicki: „Sur la convergence en moyenne des séries orthogonales".

21. Séance du 27. V. 1927. Communiqués: a) *M.* W. Nikliborc: „Nouveaux problèmes dans le calcul des variations"; b) *M.* J. Schauder: „La solution d'une équation du type elliptique dans le voisinage d'une intégrale singulière".

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique Section de Varsovie.

11. II. 1927[1]). C. Zarankiewicz: *Sur les continus de convergence* (voir Fund. math. XI, p. 19: Ueber eine topologische Eigenschaft der Ebene).

18. II. 1927. C. Kuratowski: *Sur un problème du choix concernant les continus indécomposables.*

M. K. considère le continu indécomposable C formé 1° de toutes les demi-circonférences à ordonnées positives, décrites du centre $(1/2, 0)$ par tous les points de l'ensemble parfait non-dense de Cantor 2° de toutes les demi-circonférences à ordonnées négatives, décrites pour tout n naturel du centre $(5/6 \cdot 3^{-n}, 0)$ et dont le diamètre est $\leqq 3^{-n+1}$ — également par les points de l'ensemble de Cantor (voir Fund. Math. III, p. 210). M. K. prouve que si l'on savait nommer un ensemble Z qui contienne un et un seul point de chaque „composant" de C, on pourrait aussi nommer un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue.

Soit, en effet, P la projection de Z sur l'axe X (projection faite le long des demi-circonférences dans le sens positif). Divisons l'ensemble de Cantor en sous-ensembles, rangeant dans le même sous ensemble deux nombres x et y, lorsque $x+y$ ou $x-y$ admet un développement triadique fini. P contient alors un et un seul point de chacun de ces sous-ensembles. Cette propriété, tout à fait analogue à celle de l'ensemble non-mesurable de M. Vitali, permet (en transformant C en intervalle) de transformer P en ensemble non-mesurable.

---

[1]) Pour Comptes-rendus des séances antérieures voir Tome III, p. 146 et Tome V, p. 101 de ces Annales.

En outre, Z ne peut être un ensemble (A) de Souslin.

A. Tarski: *Sur quelques propriétés caractéristiques des images d'ensembles.*

M. T. envisage la notion générale d'image (transformation) de l'ensemble A donnée par une ralation R. L'image $\overline{R}(A)$ de A donnée par R est par définition l'ensemble de tous les éléments x dont chacun est en relation R avec un au moins des éléments y de A (cf. Whitehead et Russell, Principia Mathematica I, p. 279, 37). Les images d'ensembles, considérées comme fonctions d'ensembles, jouissent d'une série de propriétés, généralement bien connues, formulées exclusivement à l'aide des notions d'Algèbre des Ensembles (Algèbre de la Logique). M. T. attire l'attention sur le fait que plusieurs de ces propriétés sont caractéristiques soit pour la notion d'image dans toute son étendue, soit pour certaines catégories des images d'ensembles.

M. T. établit en particulier les théorèmes suivants:

Th. 1. Pour qu'il existe pour une fonction (d'ensemble) donnée F une relation R telle que l'on ait toujours $F(Y) = \overline{R}(Y)$, il faut et il suffit que la fonction F soit totalement additive, c'est-à-dire, satisfaisant à la condition

$$F(\underset{Y\varepsilon K}{\Sigma} Y) = \underset{Y\varepsilon K}{\Sigma} F(Y)$$

pour toute classe K d'ensembles.

Th. 2 Pour qu'il existe, pour une fonction donnée F, une relation uni-plurivoque (ou tout simplement — en terminologie mathématique courante — une fonction univoque) R telle que l'on ait toujours $F(Y) = \overline{R}(Y)$, il faut et il suffit que la fonction F soit totalement additive et satisfasse en outre à la condition: quels que soient les ensembles X et Y, l'inclusion $X \subset F(Y)$ entraîne l'existence d'un ensemble Y_1 tel que Y_1 Y et $X = F(Y_1)$.

Th. 3. Pour qu'il existe, pour une fonction donnée F, une relation uni-plurivoque R telle que l'on ait toujours $F(Y) = \overline{R^{-1}}(Y)$, où R^{-1} est la relation inverse de R, il faut et il suffit que F soit une fonction totalement additive et multiplicative, c'est à-dire, satisfaisant à la condition $F(Y_1 . Y_2) = F(Y_1) . F(Y_2)$ pour tous deux ensembles Y_1 et Y_2.

En rapprochant les théorèmes 2 et 3, on obtient aussitôt un système des propriétés carastéristiques pour les images d'ensembles données par les relations (fonctions) biunivoques.

Th. 4. Pour qu'il existe, pour des fonctions F et G données. une relation R telle que l'on ait toujours

$$F(Y) = \overline{R}(Y) \qquad \text{et} \qquad G(X) = \overline{R^{-1}}(X),$$

il faut et il suffit que les conditions $X \,.\, F(Y) = 0$ et $Y \,.\, G(X) = 0$ soient équivalentes pour tous deux ensembles X et Y.

Th. 5. Pour qu'il existe, pour des fonctions données F et G une relation biunivoque R telle que l'on ait toujours

$$F(Y) = \overline{R}(Y) \qquad \text{et} \qquad G(X) = \overline{R^{-1}}(X),$$

il faut et il suffit que les formules $F(G(X) \,.\, Y) = X \,.\, F(Y)$ et $G(F(Y) \,.\, X) = Y \,.\, G(X)$ soient remplies pour tous deux ensembles X et Y.

Il semble intéressant que l'on puisse déduire des conditions établies dans les théorèmes 4 et 5 l'additivité totale des fonctions F et G, à l'aide des raisonnements qui restent complètement dans le domaine de l'Algèbre des ensembles.

En s'appuyant sur le th. 5, on peut formuler la définition suivante de la relation d'égalité des puissances des deux ensembles A et B:

$A \sim B$, lorsqu'il existe deux fonctions d'ensembles F et G telles que l'on ait $A = F(B)$ et $B = G(A)$ et, pour tous deux ensembles X et Y: $F(G(X) \,.\, Y) = X \,.\, F(Y)$ et $G(F(Y) \,.\, X) = Y \,.\, G(X)$.

En prenant cette définition comme point de départ, on peut développer une partie considérable de la théorie d'égalité des puissances (théorèmes élémentaires, „Aequivalenzsatz", divers théorèmes de Bernstein et de Zermelo), sans faire appel à la Théorie générale des ensembles et ne se servant que des notions et des théorèmes de l'Algèbre des ensembles.

25. II. 1927. J. Spława-Neymann: *Sur certains problèmes de Statistique mathématique* (Biometrika Vol. XVIII, C. R. T. 182).

13. V. 1927. W. Sierpiński: *Sur les fonctions de M. Hausdorff* (voir *Sur un problème de M. Hausdorff*, Fund. Math. X, p. 427).

27. V. 1927. C. Kuratowski: *Sur les points d'ordre* c (voir C. Kuratowski et S. Mazurkiewicz, Fund. Math. XI, p. 29).

24. VI. 1927. W. Sierpiński: *Sur un théoreme de M. Vitali* (voir S. Saks et W. Sierpiński: *Sur une propriété générale des fonctions*, Fund. Math. XI, p. 105).

24. X. 1927. A. Rajchman: *Sur la loi des grands nombres et l'intégrale de Fourier.*

M. R. donne l'esquisse de la démonstration de la loi de Bernouilli basée sur la considération des intégrales de Fourier. Sa démonstration se rattache de très près à celle de M. Levy.

A. Lindenbaum: *Sur quelques propriétés des fonctions de variable réelle.*

Ayant rappelé ses résultats antérieurs sur les fonctions „continues au sens de Darboux" (comme p. ex. le théorème d'après lequel toute fonction de variable réelle est somme de deux fonctions „continues au sens de Darboux"), M. L. fait remarquer qu'il y a dans la Théorie des fonctions d'autres notions simples qui, tout en étant sans grande importance par elles-mêmes, mériteraient peut-être d'être étudiées une fois.

Telle est la notion de fonction biunivoque („schlicht"), c'est-à-dire ne prenant qu'une seule fois chacune de ses valeurs, ou aussi la notion de fonction bicomplète, c'est-à-dire prenant chaque valeur une et une seule fois.

On démontre que:

1⁰ Pour tout $n \geqslant 2$ toute fonction réelle est somme de n fonctions biunivoques.

2⁰ Etant données deux fonctions f_1 et f_2 telles que l'on a pour tout x: $f_1(x) \neq f_2(x)$, il existe une fonction biunivoque $\varphi(x)$ comprise toujours entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

D'où:

3⁰ Pour toute fonction donnée, il existe une fonction biunivoque qui la représente avec une erreur $< \varepsilon$ (ce dernier nombre étant aussi petit que l'on veut).

4⁰ Toute fonction est limite (resp. somme) d'une suite (resp. série) uniformément convergente de fonctions biunivoques.

5⁰ Il existe des fonctions qui ne sont pas sommes de deux fonctions bicomplètes.

6⁰ Toute fonction qui prend toutes ses valeurs dans un ensemble de puissance du continu et toute fonction bicomplète est somme de deux fonctions bicomplètes.

7⁰ Toute fonction est limite (resp. somme) d'une suite (resp. série) de fonctions bicomplètes.

8⁰ Toute fonction est somme de trois fonctions bicomplètes.

Enfin M. L. établit un théorème général qui permet de déduire d'autres théorèmes analogues à 1⁰ ou 8⁰. Ainsi p. ex. on peut en obtenir le résultat suivant: Toute suite infinie u_n de nombres rationnels est somme de trois suites

$$u_n = u'_n + u''_n + u'''_n,$$

dont chacune contient tout nombre rationnel une et une seule fois.

22. X. 1927. W. Sierpiński: *Une définition d'ensembles (A).* Voir: *Sur le crible de M. Lusin et l'opération (A) dans les espaces abstraits*, Fund. Math. XI, p. 16.

N. Lusin: *Sur la notion de crible parfait non-borné.*

28. X. 1927. W. Sierpiński: *Sur une propriété d'ensembles projectifs* (voir: *Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A)*, Fund. Math. XI, p. 117).

M. S. communique en outre un problème posé par M. Lusin (voir Fund. Math. XI, p. 308, problème 44).

14. XI. 1927. S. Banach: *Sur les équations à infinité d'inconnus I* (à paraître).

H. Steinhaus: *Sur la convergence de séries orthogonales de M. Rademacher.*

On obtient les fonctions $\varphi_\varepsilon(t)$ de M. Rademacher, en divisant l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ en 2^n parties égales et en posant $\varphi_n(t) = \pm 1$ alternativement. M. Rademacher a démontré que la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ implique la convergence presque partout de

$$(S) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t).$$

En employant le calcul des probabilités, on démontre, que ce résultat est indépendant de l'ordre de fonctions $\varphi_n(t)$; la série (S) demeure convergente presque partout quand on change l'ordre de termes. On peut éviter le calcul des probabilités en employant un théorème sur la mesure des ensembles linéaires dont les éléments sont donnés par leurs développements dyadiques[1]).

---

[1]) Cf. Fund. Math. IV.

Les résultats ci-dessus et quelques compléments ultérieurs vont paraître dans le Matematiczèskij Zbornik de Moscou[1]).

B. Knaster: *Un théorème sur trois continus plans* (à paraître aux Fund. Math. XII).

2. XII. 1927. H. Mlicer-Grużewska: *Sur les fonctions à variation bornée et à écart Hadamardien nul.*

Mme G. communique les résultats établis par elle dans la Note portant le même titre (Comptes-Rendus de la Soc. des Sciences de Varsovie, 1928) et le théorème suivant, obtenu par elle et par M. Rajchman:

$f(x)$ étant une fonction à variation bornée et à écart nul et $\tau(x)$ la fonction caractéristique des segments, en nombre fini, situés dans l'intervalle $\leqslant 0, 2\pi \geqslant$, on a:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \tau(nx)\, df(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x)\, dx\, [f(2\pi) - f(0)],$$

où n sont des entiers positifs.

Mme G. communique ensuite les deux résultats suivants obtenus par elle:

1⁰ le téorème: Si $f(x)$ est une fonction à variation bornée, continue et à écart non nul, et $\tau(x)$ est la fonction caractéristique d'un nombre fini de segments situés dans l'intervalle $\leqslant 0, 2\pi \geqslant$ et tels que

$$\int_0^{2\pi} \tau(x)\, e^{ix}\, dx \neq 0,$$

alors on a:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t))\, df(x) \neq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x)\, dx [f(2\pi) - f(0)]$$

pour une au moins des valeurs de t de l'intervalle $0, 2\pi$.

2⁰ une nouvelle démonstration d'un théorème non publié de M. A. Rajchman, d'après lequel la variation d'une fonction $f(x)$ à variation bornée et à écart nul est nulle sur chaque ensemble du type H. Cette démonstration a sur celle trouvée par l'auteur en 1924 l'avantage d'être presque immédiate.

---

[1]) Cf. aussi les notes de M. A. Khintchine et de MM. A. Khintchine et A. Kolmogoroff dans le Mat. Zbornik, XXXII: 4, (1925), pp. 668—688.

W. Sierpiński: *Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle* (voir Fund. Math. XI, p. 302).

9. XII. 1927. A. Tarski: *Quelques théorèmes généraux sur les images d'ensembles.*

M. T. rappelle ses résultats antérieurs concernant la notion d'image $\overline{R}(A)$ d'un ensemble quelconque A donnée par une relation arbitraire R (cf. ces Comptes-rendus p. 126) et considère à ce point de vue le théorème de M. Banach (Fund. Math. VI, p. 236) constituant une généralisation de Aequivalenzsatz de Cantor-Bernstein. En langage de relations ce théorème de M. Banach peut être formulé comme il suit:

(T_1) R et S étant des relations (fonctions) biunivoques et telles que

$$A = \overline{R}(B_1) \qquad A_1 = \overline{S}(B) \tag{α_1}$$

où $A_1 \subset A$ et $B_1 \subset B$, il existe des ensembles D, E, F et G tels que $A = D + E$, $B = F + G$, $DE = 0 = FG$ et

$$D = \overline{R}(F) \qquad E = \overline{S}(G). \tag{β_1}$$

Dans le domaine des relations biunivoques, on déduit aussitôt du théorème (T_1) deux théorèmes analogues (T_2) et (T_3) qui s'obtiennent de (T_1), en y remplaçant respectivement les conditions (α_1) et (β_1) par les suivantes:

$$A = \overline{R}(B_1) \qquad B = \overline{S}(A_1) \tag{α_2}$$

$$D = \overline{R}(F) \qquad G = \overline{S}(E) \tag{β_2}$$

et

$$B_1 = \overline{R}(A) \qquad A_1 = \overline{S}(B) \tag{α_3}$$

$$F = \overline{R}(D) \qquad E = \overline{S}(G). \tag{β_3}$$

Or, M. T. montre que l'hypothèse de biunivocité des relations R et S dans les théorèmes (T_1), (T_2) et (T_3) n'est pas essentielle; à savoir:

1⁰ le théorème (T_1) reste vrai, lorsque la (relation) R est univoque dans un sens (ou uni-plurivoque, donc une fonction au sens habituel de ce mot) et S est une relation tout à fait arbitraire,

2⁰ le théorème (T_2) reste vrai, lorsque les deux relations R et S sont uni-plurivoques (donc des fonctions).

M. T. démontre en outre que ces résultats ne peuvent être généralisés davantage.

Dans tous ces raisonnements M. T. a recours à quelques nouvelles formules élémentaires sur les images d'ensembles, en particulier à la formule

$$\overline{R}(A \,.\, \overline{R^{-1}}(B)) = \overline{R}(A) \,.\, B,$$

où R est une relation uni-plurivoque et R^{-1} en est la relation inverse.

B. Knaster: *Un théorème sur les fonctions d'ensembles.*

M. K. communique les résultats suivants, obtenus en commun par M. Tarski et lui.

En ce qui concerne le th. (T_3) de la communication précédente, on peut montrer que ce théorème reste vrai pour des relations R et S tout à fait arbitraires (donc aussi lorsqu'elles sont plurivoques dans les deux sens). Cela résulte du théorème:

(T) f et g étant des fonctions monotones[1]) d'ensembles telles que

$$B_1 = f(A) \qquad \text{et} \qquad A_1 = g(B)$$

où $A_1 \subset A$ et $B_1 \subset B$, il existe des ensembles D, E, F et G tels que $A = D + E$, $B = F + G$, $DE = 0 = FG$ et

$$F = f(D) \qquad \text{et} \qquad E = g(G).$$

Il suffit, en effet, de poser dans (T):

$$f(X) = \overline{R}(X) \qquad \text{et} \qquad g(Y) = \overline{S}(Y)$$

pour tout $X \subset A$ et $Y \subset B$, les images de relations quelconques étant des fonctions monotones d'ensembles.

Le théorème (T) lui-même n'est qu'un cas particulier du lemme:

(L) $h(X)$ étant une fonction monotone d'ensembles et A un ensemble tel que $h(A) \subset A$, il existe un sous-ensemble D de A tel que $D = h(D)$.

En effet, si l'on pose dans (L):

$$h(X) = A - g(B - f(X)),$$

---

[1]) C'est-à-dire telles que $X \subset Y$ entraîne $f(X) \subset f(Y)$ et $g(X) \subset g(Y)$.

la monotonie des fonctions f et g entraîne celle de h; or l'ensemble $D = h(D)$ remplit la thèse du théorème (T) et détermine les ensembles E, F et G.

M. K. refère donc la démonstration du lemme (L) avec quelques remarques concernant ses applications à des fonctions d'ensembles qui ne sont pas images de relations entre ses éléments; telles p. ex. la dérivée et la fermeture d'ensembles, considérées en Topologie.

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1927.

Président: M. Z. Krygowski.
Vice-Présidents: MM. M. Huber et S. Zaremba.
Secrétaire: M. J. Spława-Neyman.
Vice-Secrétaire: MM. S. Rozental et S. K. Zaremba.
Trésorier: M. A. Wilk.
Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.
Commission de Contrôle: MM. K. Fijoł, G. Leśnodorski et S. Zakrocki.
Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. E. Żyliński, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. W. Staniewicz.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresses.

Abbréviations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno.

Dr. Kazimierz Abramowicz (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Herman Auerbach (L), Lwów, ul. Szaszkiewicza 1.
Prof. Dr. Stefan Banach (L), Lwów, Uniwersytet Jána Kazimierza.
Prof. Tadeusz Banachiewicz, Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Jan Baran, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Prof. Dr. Kazimierz Bartel (L), Warszawa, Prezydjum Rady Ministrów.
Mag. Nina Bary (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Prof. Czesław Białobrzeski, Warszawa, ul. Hoża 69.
Mieczysław Biernacki (Wa), Paris XV, 39, rue Bargue.

Mag. Zygmunt Birnbaum (L), Lwów, ul. Św. Anny 1.
Inż. Dr. Izydor Blumenfeld (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Prof. Dr. Georges Bouligand, Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Dr. Stefan Bóbr (Wa), Warszawa, Aleje Jerozolimskie 9 m. 23.
Doc. Dr. Łucjan Böttcher (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Franciszek Brablec, Kraków, ul. Studencka 4.
Dr. Feliks Burdecki (Wa), Zambrów (pow. Łomżyński), Gimnazjum.
Dr. Celestyn Burstin (L), Wien VIII (Autriche), Laudonstrasse 8.
Prof. Dr. Élie Cartan, Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.
Dr. Juljan Chmiel, Kraków, ul. Św. Tomasza 33.
Antoni Chromiński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Dr. Leon Chwistek, Kraków, ul. Szujskiego 7.
Dr. Jakób Cukierman (Wl), Wilno, ul. Mickiewicza 22 m. 30.
Dr. Kazimierz Cwojdziński (P), Poznań, ul. Szamarzewskiego 13.
Jadwiga Czarnecka (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).
Dr. Bohdan Debryng, Warszawa, ul. Topolowa, Wojenna Szkoła Inżynierji.
Prof. Dr. Samuel Dickstein (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Pułk. Gerhard Długowski, Rembertów, Centrala badań poligonalnych.
Prof. Dr. Wacław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 13.
Prof. Dr. Władysław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 15.
Prof. Dr. Placyd Dziwiński (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.
Prof. Dr. Marcin Ernst (L), Lwów, ul. Długosza 25, Instytut Astronomiczny.
Kazimierz Fijoł, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.
Prof. Dr. Paul Flamant, Strasbourg (France), 31, Avenue de la Forêt-Noire.
Mirosław Gibas, Kraków, ul. Krupnicza 28.
Dr. Stefan Glass (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 5 a.
Stanisław Gołąb, Kraków, ul. Lenartowicza 12.
Prof. Dr. Lucjan Grabowski (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Henryk Greniewski, Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Dr. Aleksander Grużewski (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 1 m. 25.
Dr. Halina Grużewska (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 1 m. 25.
Prof. Dr. Antoni Hoborski, Kraków, ul. Smoleńska 26.

Marja Hommé (L), Lwów, ul. Łyczakowska 151.
Prof. Dr. Maksymiljan Huber (L), Lwów, ul. Potockiego 31.
Doc. Dr. Witold Hurewicz (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Dr. Mojżesz Jacob (L), Wien II (Autriche), Wolfgang-Schmälzlgasse 10/16.
Zenon Jagodziński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Prof. Dr. Maurice Janet, Caen (France), 16, place de la République.
Wincenty Janik, Kraków, ul. Studencka, Gimnazjum.
Prof. Dr. Kazimierz Jantzen (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 9 m. 3.
Dr. Stefan Kaczmarz (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Stanisław Kalandyk (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Dr. Bazyli Kalicun-Chodowicki (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Prof. Dr. Joseph Kampé de Fériet, Lille (France), 16, rue des Jardins.
Prof. Dr. Stefan Kempisty (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Dr. Michał Kerner (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Stefania Klawekówna (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Prof. Dr. J. R. Kline (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Doc. Dr. Bronisław Knaster (Wa), Warszawa, ul. Żórawia 24A m. 11.
Prof. Dr. Zdzisław Krygowski (P), Poznań, ul. Głogowska 74/5.
Dr. Marjan Kryzan (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Prof. Dr. Kazimierz Kuratowski (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 10.
Dr. Stefan Kwietniewski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 73 m. 18.
Prof. Dr. Franciszek Leja (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Prof. Dr. Stanisław Leśniewski (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Gustaw Leśnodorski, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Prof. Dr. Tullio Levi-Civita, Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Władysław Lichtenberg (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Prof. Dr. Leon Lichtenstein (Wa), Leipzig (Allemagne), Grossgörschenstrasse 3.
Adolf Lindenbaum (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Prof. Dr. Stanisław Loria (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Prof. Dr. Antoni Łomnicki (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Zbigniew Łomnicki (L), Lwów, ul. Nabielaka 19.
Prof. Dr. Jan Łukasiewicz (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Prof. Dr Mikołaj Łuzin (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Dr. Adam Maksymowicz (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Stanisław Malecki, Dębica, Gimnazjum.

Andrzej Marconi (P), Poznań, ul. Kosińskiego 26.
Prof. Dr. Stefan Mazurkiewicz (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Doc. Inż. Dr. Meyer (L), Wien (Autriche), Université.
Prof. Dr. Dymitr Mieńszow (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Prof. Dr. R. L. Moore (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Władysław Moroń (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Sir Thomas Muir, F. R. S. etc., Rondebosch (South Africa).
Zofja Napadiewiczówna (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.
Dr. Jerzy Spława Neyman (Wa), Kraków, ul. Piotra Michałowskiego 2.
Doc. Dr. Władysław Nikliborc (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Doc. Dr. Otton Nikodym, Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Dr. Stanisława Nikodymowa (Wa), Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Szymon Ohrenstein, Drohobycz, I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Władysław Orlicz (L), Lwów, ul. Nabielaka 3.
Józef Orłowski (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Ludwik Ostrzeniewski (P), Poznań, ul. Ogrodowa 2.
Inż. Jan Pankalla (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Dr. Aleksander Pareński (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Prof. Dr. Józef Patkowski (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Dr. Egon Sharpe Pearson, London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Prof. Dr. Karl Pearson, London W. C. 1, University College.
Prof. Dr. Tadeusz Pęczalski (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Prof. Dr. Antoni Plamitzer (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Prof. Dr. Antoni Przeborski (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Inż. Józef Przygodzki (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.
Doc. Dr. Aleksander Rajchman (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Prof. Dr. Alfred Rosenblatt, Kraków, ul. Krowoderska 47.
Stefan Rozental, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Antoni Rozmus, Piotrków, Gimnazjum państwowe.
Prof. Dr. Juljusz Rudnicki (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 22.
Prof. Dr. Stanisław Ruziewicz (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Walerja Sabatowska (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Doc. Dr. Stanisław Saks (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 9 m. 4.
Doc. Dr. Juljusz Schauder (L), Lwów, ul. Zielona 3.
Dr. Lidja Seipeltówna (P), Poznań, ul. Gajowa 4.

Prof. Dr. Pierre Sergesco, Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Prof. Dr. Wacław Sierpiński (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 55 m. 2.
Prof. Dr. Jan Sleszyński, Kraków, ul. Wygoda 7.
Kazimierz Smoliński (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Helena Smoluchowska (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Władysław Smosarski (P), Poznań, ul. Karczewskiego 14.
Dr. Edward Stamm, Lubowidz, p. Zieluń nad Wkrą (pow. Mława).
Prof. Dr. Wiktor Staniewicz (Wl), Wilno. ul. Uniwersytecka 7.
Inż. Ksawery Stankiewicz, Kraków, ul. Długa 50.
Zofja Starosolska-Szczepanowska (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Samuel Steckel, Białystok, Gimnazjum Druskina, Szlachecka 4.
Prof. Dr. Hugo Steinhaus (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Prof. Dr. Włodzimierz Stożek (L), Lwów, ul. Ujejskiego 1.
Prof. Dr. Stefan Straszewicz (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Rejtana 17.
Mjr. Karol Szczepanowski (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Piotr Szymański (Wa), Warszawa, ul. Żelazna 29 m. 17.
Władysław Ślebodziński (P), Poznań, ul. Głogowska 51.
Doc. Dr. Alfred Tarski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Inż. Henryk Titz, Kraków, ul. Św. Tomasza 27.
Andrzej Turowicz, Kraków. ul. Sobieskiego 7.
Włodzimierz Urbański, Kraków-Podgórze. ul. Krzemionki, Ak. Górn.
Inż. Kazimierz Vetulani, Kraków, ul. Smoleńska 14.
Dr. Arnold Walfisz (Wa), Warszawa, ul. Królewska 27 m. 16.
Doc. Dr. Tadeusz Ważewski, Kraków, ul. Św. Jana 20.
Prof. Dr Kasper Weigel (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Sala Weinlösówna (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Prof. Dr. Jan Weyssenhoff (Wl), Wilno, ul. Słowackiego 11.
Leopold Węgrzynowicz, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Marjan Węgrzynowicz (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Dr. Antoni Wilk. Kraków, ul. Wybickiego 4.
Prof. Dr. Witold Wilkosz, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Irena Wilkoszowa, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Dr. Franciszek Włodarski (P), Poznań, Przecznica 6.
Mag. Aleksander Wundheiler (Wa), Warszawa. ul. Pawia 39.
Stanisław Zakrocki, Kraków, ul. Smoleńska 21.
Dr. Zygmunt Zalcwasser (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Dr. Kazimierz Zarankiewicz (Wa), Warszawa, ul. Śniadeckich 18 m. 9.
Prof. Dr. Stanisław Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.

Stanisław Krystyn Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.
Miron Zarycki (L), Lwów, Gimnazjum IX, ul. Chocimska 6.
Doc. Dr. Zygmunt Zawirski (L), Lwów, ul. Leona Sapiehy 51.
Doc. Dr. Antoni Zygmund (Wa), Warszawa, ul. Złota 83 m. 8.
Prof. Dr. Kazimierz Żórawski (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Prof. Dr. Eustachy Żyliński (L), Lwów, ul. Długosza 27.

Membres dont les adresses manquent.

Bohdan Babski.
Władysław Bogucki.
Dr. Juljan Chmiel.
Dr. Stanisław Dobrowolski (Wa).
Inż. Ludwik Kaszycki.
Zygmunt Kobrzyński (Wa).
Władysław Majewski (L).
Jan Sobaszek

Membres décédés.

† X. Feliks Hortyński, S. J.
† Dr. Bohdan Zaleski (P).

Table des matières.


1

